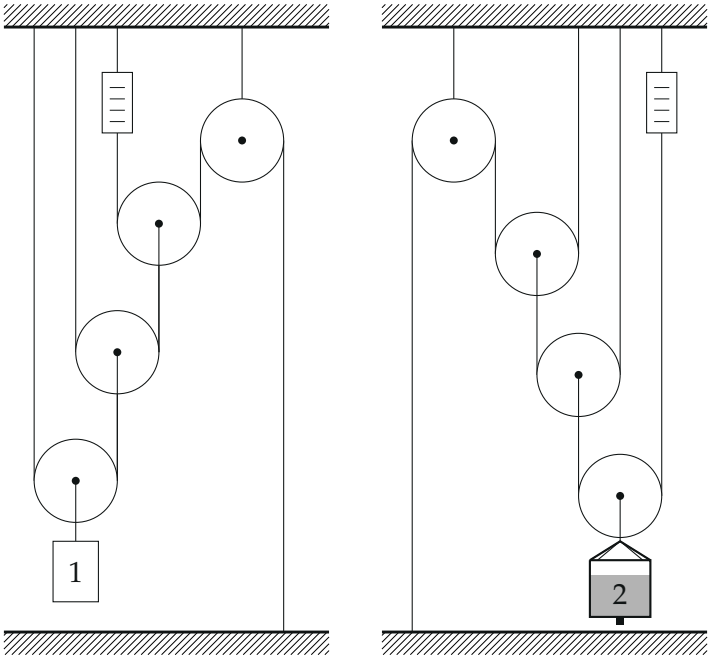
Системы блоков с вытекающей водой

Задача 6. [МОШ 2012/13, 8 класс, задача 6] Имеются две системы блоков, изображенные на рисунке. Блоки соединены легкими нерастяжимыми нитями. В каждой системе блоков имеются одинаковые динамометры, закрепленные между соответствующими участками нитей (см. рисунок). Груз 1 имеет массу $m_1 = 200$ г. Груз 2 представляет собой сосуд, наполненный водой, суммарной массой $m_{02} = 800$ г. В сосуде имеется отверстие, изначально закрытое пробкой. Если её вытащить, то через отверстие вода будет вытекать тонкой струйкой со скоростью $v = 25$ мл/мин.

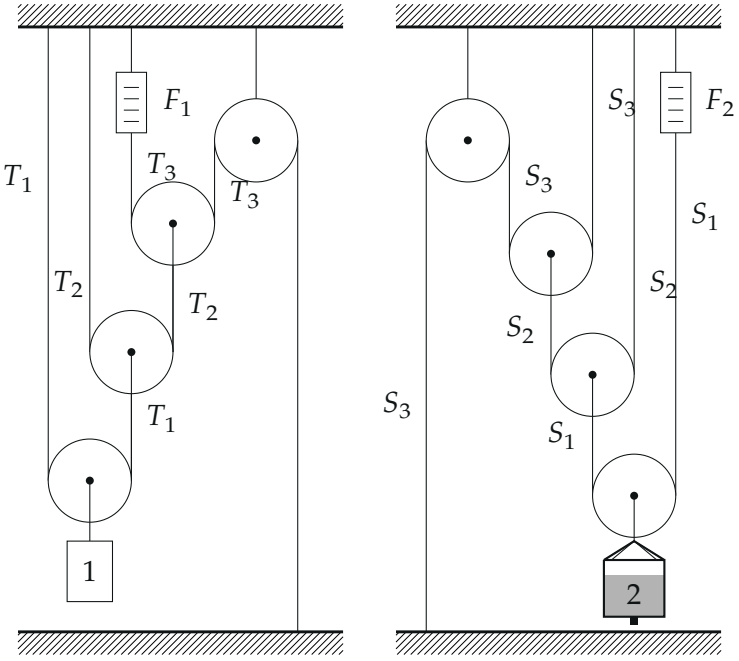
Определите, через сколько минут после того, как вытащить пробку, показания динамометров будут одинаковыми. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.



▲ **Решение. Что происходит.** Нити лёгкие, блоки без массы и трения, поэтому на каждом блоке сила, с которой его тянет груз, делится между

двумя ветвями нити, огибающей блок: каждая ветвь несёт вдвое меньшую силу. Динамометр показывает натяжение той ветви, в которую он включён. В левой системе он стоит в конце цепочки из трёх блоков, в правой — на ветви самого нижнего блока, у самого груза. Показание левого динамометра постоянно, показание правого уменьшается по мере того, как вода вытекает; надо найти, когда они сравняются.

Обозначения. Блоки левой системы нумеруем от груза: блок 1 держит груз 1, блок 2 подвешен на нити от блока 1, блок 3 — на нити от блока 2; T_1, T_2, T_3 — натяжения нитей, огибающих эти блоки; F_1 — показание левого динамометра. В правой системе S_1, S_2, S_3 — натяжения нитей, огибающих блоки от нижнего (с сосудом) вверх; F_2 — показание правого динамометра; m_2 — масса сосуда с водой в данный момент. Ось y направим вверх; g — ускорение свободного падения.



1. Левая система: блок 1. Блок с грузом 1 покоится, значит, равна нулю сумма сил на него. Вниз действует вес груза $m_1 g$, вверх — две ветви нити с одинаковым натяжением T_1 (нить без трения огибает блок,

поэтому натяжение вдоль неё одно). Проекция на ось y:

$$2T_1 - m_1 g = 0 \;\Rightarrow\; T_1 = \frac{m_1 g}{2}.$$

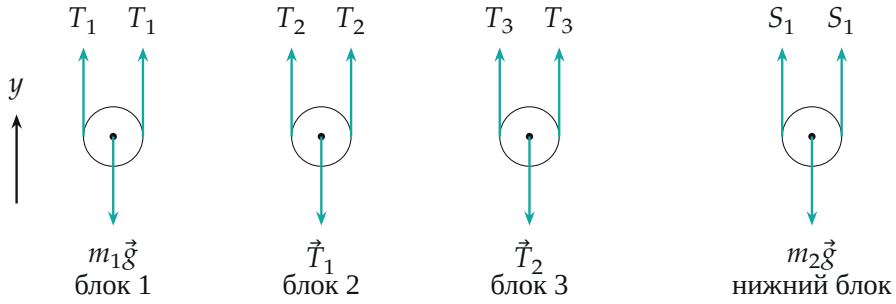
2. Блок 2. К его оси привязана правая ветвь нити блока 1, она тянет ось вниз с силой T_1; вверх тянут две ветви нити блока 2:

$$2T_2 - T_1 = 0 \;\Rightarrow\; T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{m_1 g}{4}.$$

3. Блок 3 и динамометр. Так же для блока 3: ось тянется вниз с силой T_2 ветвью нити блока 2, вверх — двумя ветвями нити блока 3. Одна из них идёт через динамометр к потолку, поэтому динамометр показывает T_3:

$$2T_3 - T_2 = 0 \;\Rightarrow\; F_1 = T_3 = \frac{T_2}{2} = \frac{m_1 g}{8}.$$

Подставляем числа: $F_1 = \dfrac{0{,}2 \cdot 10}{8} = 0{,}25$ Н (с $g = 10$ м/с^2). Показание не меняется, пока груз 1 неизменен.



4. Правая система. Сосуд подвешен к оси нижнего блока. Нить этого блока одним концом привязана к оси следующего блока, другим — через динамометр к потолку; натяжение вдоль неё одинаково и равно S_1. Равновесие нижнего блока вместе с сосудом (сумма сил на ось равна нулю):

$$2S_1 - m_2 g = 0 \;\Rightarrow\; F_2 = S_1 = \frac{m_2 g}{2}.$$

Остальные блоки правой системы (S_2, S_3) только удерживают левую ветвь нити нижнего блока с силой S_1 и на показание динамометра не влияют: оно определено равновесием нижнего блока.

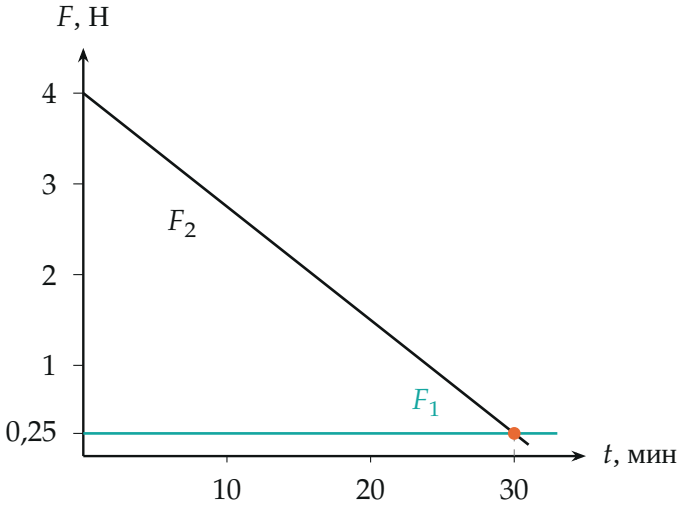
5. Условие равенства показаний. Приравниваем $F_1 = F_2$:

$$\frac{m_1 g}{8} = \frac{m_2 g}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{4} = \frac{200\text{ г}}{4} = 50\text{ г}.$$

Динамометры покажут одинаковое, когда масса сосуда с водой снизится до 50 г.

6. Сколько воды вытечет. Было $m_{02} = 800$ г, должно остаться 50 г, значит, должно вытечь $\Delta m = 800 - 50 = 750$ г воды. Скорость вытекания по массе: $\rho v = 1000$ кг/м^3 $\cdot$ 25 мл/мин $= 1$ г/мл $\cdot$ 25 мл/мин $= 25$ г/мин. Время:

$$t = \frac{\Delta m}{\rho v} = \frac{750\text{ г}}{25\text{ г/мин}} = 30\text{ мин}.$$



Показания динамометров: правый (чёрная прямая) убывает от 4 Н на 0,125 Н за минуту, левый (бирюзовый) постоянен; они совпадают через 30 мин (красная точка).

Обратите внимание. Показание правого динамометра равно $m_2 g/2$, а не $m_2 g/8$: динамометр включён в нить нижнего блока, а не в конец

всей цепочки, как слева. Деление на 2 происходит на каждом блоке, который лежит на пути от груза до динамометра.

Проверка. Начальные показания: левый 0,25 Н, правый $\frac{0{,}8\cdot 10}{2} = 4$ Н. Правое показание убывает линейно: $F_2(t) = \frac{(m_{02}-\rho v t)g}{2}$, за каждую минуту уходит 25 г и показание падает на $\frac{0{,}025\cdot 10}{2} = 0{,}125$ Н. До 0,25 Н оно падает на 3,75 Н, то есть за $\frac{3{,}75}{0{,}125} = 30$ мин — как и в решении выше. Размерность: [г]/[г/мин] = мин. Требуется, чтобы пустой сосуд был не тяжелее 50 г, иначе масса 50 г никогда не будет достигнута; по условию это так.

Ответ. Через 30 мин после того, как вытащили пробку.