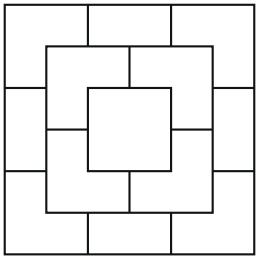
Плавающая пирамидка из кубиков

Задача 7. [МОШ 2012/13, 8 класс, задача 7] Из одинаковых кубиков строят объемную пирамидку из 10-ти рядов, верхние три ряда которой изображены на рисунке (вид сверху). Кубики жестко скреплены между собой.



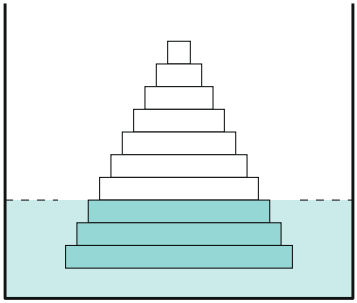
Если эту пирамидку опустить в сосуд с бензином, плотность которого равна $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3, то она будет плавать, погружаясь в бензин ровно на 3 нижних ряда.

Определите плотность жидкости, в которой эта пирамидка будет плавать, погружаясь ровно на 1 нижний ряд.

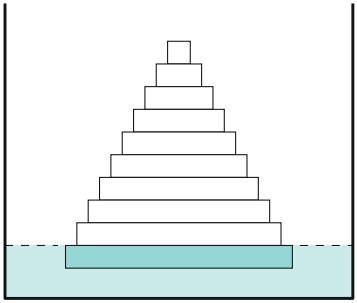
▲ **Решение. Что происходит.** Пирамидка плавает, значит, её вес уравновешен силой Архимеда, а та равна весу вытесненной жидкости. Вес пирамидки один и тот же в обеих жидкостях, поэтому вес жидкости, вытесненной нижними тремя рядами бензина, равен весу жидкости, вытесненной одним нижним рядом в новой жидкости. Остаётся посчитать, сколько кубиков в нижних рядах: для этого нужно понять устройство пирамидки по виду сверху.

Обозначения. v — объём одного кубика, M — масса пирамидки, ρ_2 — искомая плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

1. Устройство пирамидки. На виде сверху три вложенных квадрата с центром в одной точке: верхний ряд — один кубик (1×1), под ним ряд $2 \times 2 = 4$ кубика, под ним ряд $3 \times 3 = 9$ кубиков, и так далее: ряд с номером k (считаем сверху) содержит $k \times k = k^2$ кубиков. Пирамидка — ступенчатая, каждый ряд — сплошной квадрат из кубиков.



в бензине: 3 нижних ряда



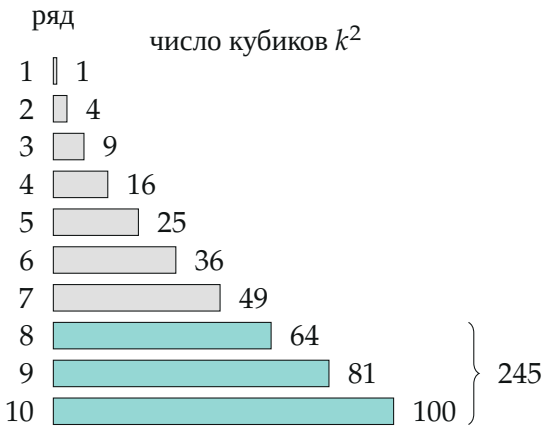
в жидкости 2: 1 нижний ряд

Пирамидка (вид сбоку, ступени — ряды) в двух жидкостях; погружённые ряды закрашены.

2. Сколько кубиков в нижних рядах. Нижний, десятый ряд: $10^2 = 100$ кубиков. Три нижних ряда — восьмой, девятый и десятый:

$$8^2 + 9^2 + 10^2 = 64 + 81 + 100 = 245.$$

Объём погружённой части в бензине $V_1 = 245v$, в новой жидкости $V_2 = 100v$. Всего в пирамидке $\sum k^2 = 385$ кубиков, но полное число нам понадобится только для проверки.



Число кубиков по рядам (k^2). Нижние три ряда выделены: $64 + 81 + 100 = 245$.

3. Условие плавания в бензине. Вес пирамидки Mg равен силе Архимеда, то есть весу вытесненного бензина:

$$Mg = \rho_1 g V_1 = \rho_1 g \cdot 245v.$$

4. Условие плавания в новой жидкости. Масса та же, вытеснена жидкость объёмом V_2:

$$Mg = \rho_2 g V_2 = \rho_2 g \cdot 100v.$$

5. Решение. Приравниваем правые части (массу пирамидки, объём кубика и g знать не нужно, они сокращаются):

$$\rho_2 \cdot 100v = \rho_1 \cdot 245v \;\Rightarrow\; \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{245}{100} = 0{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 2{,}45 = 1{,}96\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

В единицах СИ: $1{,}96$ г/см^3 $= 1960$ кг/м^3.

Обратите внимание. Число кубиков в ряду растёт как k^2, а не как k или $2k-1$: пирамидка объёмная, и ряд — целый квадрат, а не рамка. Если считать ряд одной «линией» кубиков, получится неверное отношение.

Проверка. Размерность: плотность умножена на безразмерное отношение чисел кубиков, получается плотность. Второй способ — через среднюю плотность пирамидки. Пирамидка из 385 кубиков и массой $M = \rho_1 \cdot 245v$ имеет среднюю плотность $\rho_1 \cdot \frac{245}{385} = 0{,}8 \cdot 0{,}636 \approx 0{,}51$ г/см^3 (меньше плотности бензина, поэтому пирамидка и плавает). В новой жидкости погружён один ряд, это $\frac{100}{385} \approx 26\,\%$ объёма пирамидки, значит, плотность жидкости $\rho_2 = \frac{0{,}51}{0{,}26} \approx 1{,}96$ г/см^3 — то же.

Ответ. Плотность жидкости $\rho_2 = 1{,}96$ г/см^3 $= 1960$ кг/м^3.