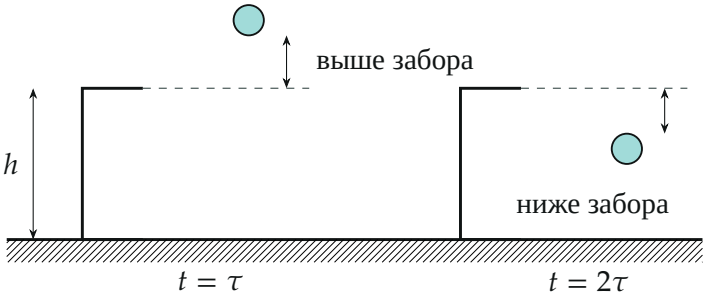
Камень и забор

Задача 1. [МОШ 2012/13, 9 класс, задача 1] Камень, брошенный вертикально вверх с поверхности Земли, через промежуток времени $\tau = 1$ с после начала движения оказался выше забора высотой $h = 4$ м, а еще через этот же промежуток времени $\tau = 1$ с — ниже этого забора. Какой могла быть начальная скорость камня? В какой момент времени от начала движения могла быть достигнута максимальная высота подъема камня? До какой максимальной высоты мог подняться камень? Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывайте.



Поясняющий рисунок: положение камня относительно верха забора в моменты τ и 2τ

▲ **Решение. Что происходит.** Камень летит с постоянным ускорением g, направленным вниз, поэтому его высота в любой момент — квадратичная функция времени. Условие даёт два неравенства: в момент τ камень выше забора, в момент 2τ — ниже. Каждое неравенство ограничивает начальную скорость v_0 с одной стороны. Все остальные величины (время подъёма и максимальная высота) выражаются через v_0, поэтому ответ на каждый вопрос — тоже промежуток.

Обозначения. Ось y направлена вертикально вверх, начало отсчёта — точка броска на поверхности Земли. v_0 — начальная скорость, $h(t)$ — высота камня над Землёй в момент t (здесь и далее h без аргумента — высота забора), $t_{\max}$ — момент максимальной высоты, H — максимальная высота.

1. Закон движения. Движение равноускоренное, в проекции на ось y ускорение равно $-g$, начальная координата 0, начальная скорость v_0:

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

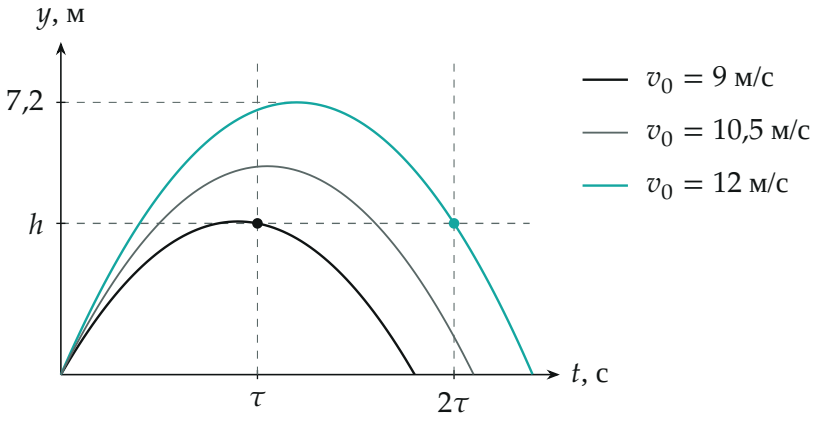
2. Условие в момент τ (выше забора).

$$v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} > h \quad \Rightarrow \quad v_0 > \frac{h}{\tau} + \frac{g\tau}{2} = 4 + 5 = 9 \text{ м/с}.$$

3. Условие в момент 2τ (ниже забора).

$$2v_0\tau - 2g\tau^2 < h \quad \Rightarrow \quad v_0 < \frac{h}{2\tau} + g\tau = 2 + 10 = 12 \text{ м/с}.$$

Получаем 9 м/с $< v_0 <$ 12 м/с. Границы не включаются: при $v_0 = 9$ м/с в момент τ камень лишь касается верха забора, а при $v_0 = 12$ м/с в момент 2τ он снова на этой высоте.



Зависимость высоты от времени для граничных скоростей и одной промежуточной

4. Время подъёма. В высшей точке скорость равна нулю: $v_0 - gt_{\max} =$

0, откуда $t_{\max} = v_0/g$. Это возрастающая функция v_0, поэтому

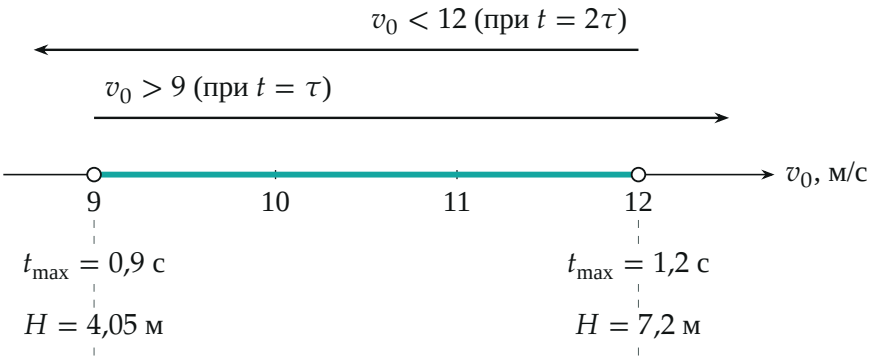
$$\frac{9}{10} < t_{\max} < \frac{12}{10} \quad \Rightarrow \quad 0{,}9\text{ с} < t_{\max} < 1{,}2\text{ с}.$$

5. Максимальная высота. Подставим $t_{\max}$ в закон движения:

$$H = v_0 t_{\max} - \frac{g t_{\max}^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Эта функция тоже возрастает при $v_0 > 0$, поэтому

$$\frac{81}{20} < H < \frac{144}{20} \quad \Rightarrow \quad 4{,}05\text{ м} < H < 7{,}2\text{ м}.$$



Допустимые v_0 и соответствующие им $t_{\max}$ и H на границах промежутка

Обратите внимание. Если $9 < v_0 < 10$ м/с, к моменту 2τ камень уже упал на землю — он, конечно, ниже забора, и условие выполнено; формула $y(2\tau) = 2v_0\tau - 2g\tau^2$ для такого случая даёт отрицательное число, но неравенство $y(2\tau) < h$ остаётся верным и границу 12 м/с не меняет. Нужная ситуация «выше–ниже» получается и когда камень в момент τ ещё поднимается ($v_0 > 10$ м/с), и когда уже падает ($v_0 < 10$ м/с).

Проверка. Пример внутри промежутка, $v_0 = 10{,}5$ м/с: $y(\tau) = 10{,}5 - 5 = 5{,}5$ м > 4 м, $y(2\tau) = 21 - 20 = 1$ м < 4 м — условие выполнено.

Размерность: $v_0\tau$, $g\tau^2$ и h — метры; v_0/g — секунды. Максимальную высоту можно найти и по закону сохранения энергии: $mv_0^2/2 = mgH$, то же $H = v_0^2/(2g)$.

Ответ. Начальная скорость 9 м/с $< v_0 <$ 12 м/с; максимальная высота достигалась в момент 0,9 с $< t_{\max} <$ 1,2 с; камень мог подняться на высоту 4,05 м $< H <$ 7,2 м.