Сечение капилляра по графику

Задача 2. [МОШ 2012/13, 9 класс, задача 2] Расстояние между отметками 35 °C и 42 °C шкалы медицинского ртутного термометра равно 5 см, а в резервуаре термометра хранится 2 г ртути. Оцените по этим данным площадь поперечного сечения капилляра термометра (в квадратных миллиметрах). График зависимости объема V ртути от температуры t, выраженной в градусах Цельсия, является прямой линией, изображенной на рисунке. При 100 °C объем ртути в 1,018 раз больше объема ртути при 0 °C. Плотность ртути при температуре 0 °C считайте равной 13,6 г/см^3. Тепловым расширением стекла можно пренебречь.

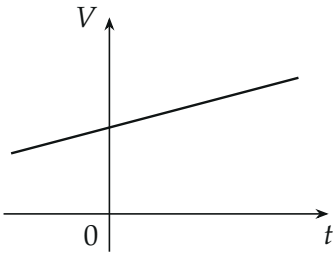


Рисунок условия: график $V(t)$ — прямая

▲ **Решение. Что происходит.** При нагревании ртуть расширяется и выдавливается из резервуара в тонкий капилляр. Приращение объёма ртути на каком-то интервале температур равно объёму столбика, вошедшего в капилляр: площадь сечения S умножить на длину столбика L. Приращение объёма мы найдём из графика — прямой линии, а длина столбика между отметками известна.

Обозначения. V_0 — объём ртути при 0 °C; $V(t)$ — объём при температуре t; $m = 2$ г, $\rho_0 = 13{,}6$ г/см^3; $L = 5$ см $= 50$ мм — расстояние между отметками 35 °C и 42 °C; S — искомая площадь сечения капилляра.

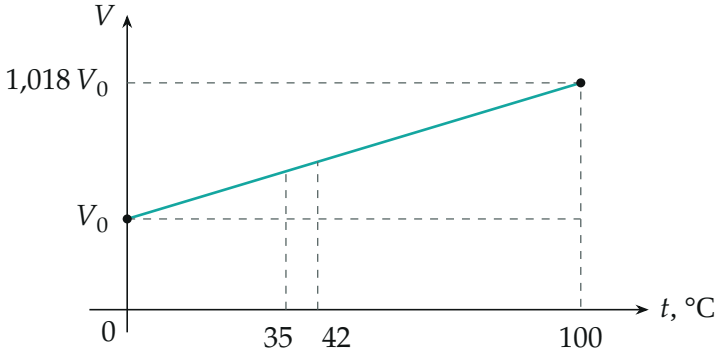


График $V(t)$ в удобном масштабе по оси V: на самом деле наклон намного меньше (изменение всего 1,8%)

1. Что даёт линейный график. Прямая линия значит, что объём растёт на одну и ту же величину при каждом градусе: $V(t) = V_0\,(1 + \beta t)$, где β — доля от V_0, на которую ртуть расширяется за 1 °C. За 100 °C объём вырос в 1,018 раза, то есть на $0{,}018\,V_0$:

$$\beta = \frac{1{,}018 - 1}{100\ ^\circ\text{C}} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ ^\circ\text{C}^{-1}.$$

2. Объём ртути при 0 **°C** — по массе и плотности:

$$V_0 = \frac{m}{\rho_0} = \frac{2\ \text{г}}{13{,}6\ \text{г/см}^3} \approx 0{,}147\ \text{см}^3 = 147\ \text{мм}^3.$$

Ответ нужен в мм^2, поэтому сразу переходим к миллиметрам: в 1 см^3 — 1000 мм^3.

3. Приращение объёма между отметками. Температура вырастает на $42 - 35 = 7$ °C, и прирост объёма — 7 шагов по βV_0:

$$\Delta V = \beta V_0\,(42 - 35) = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 147 \cdot 7\ \text{мм}^3 \approx 0{,}185\ \text{мм}^3.$$

Благодаря линейности этот прирост не зависит от того, с какой именно температуры мы начали: объём при 35 °C считать не нужно.

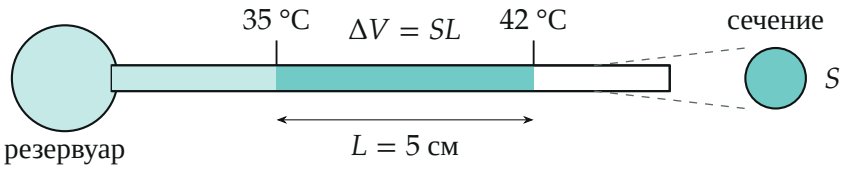


Схема термометра (капилляр утолщён для наглядности): тёмным показан объём ΔV между отметками

4. Связь с сечением. Объём цилиндрического участка капилляра между отметками равен произведению площади сечения на длину:

$$\Delta V = S\,L \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\Delta V}{L} = \frac{0{,}185\ \text{мм}^3}{50\ \text{мм}} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{мм}^2.$$

Обратите внимание. Задача просит оценку: мы считаем, что вся ртуть (2 г) имеет один и тот же объём V_0 и что стекло не расширяется. Ртуть в капилляре — тысячные доли от V_0, её вклад ничтожен; расширение стекла условие велит не учитывать (в реальном термометре оно уменьшило бы видимое расширение ртути примерно на десятую часть).

Проверка. Другим путём: за один градус столбик удлиняется на $L/7 \approx 7{,}1$ мм, а объём растёт на $\beta V_0 \approx 0{,}0265$ мм^3; $S = 0{,}0265/7{,}1 \approx 0{,}0037$ мм^2 — то же. Размерность: мм^3/мм = мм^2. Физически: диаметр такого капилляра $d = \sqrt{4S/\pi} \approx 0{,}07$ мм — действительно «волосяной» канал медицинского термометра.

Ответ. $S \approx 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ мм^2 $\approx 0{,}0037$ мм^2.