Горизонтальный стержень с блоками

Задача 3. [МОШ 2012/13, 9 класс, задача 3] На рисунке изображен легкий горизонтальный жесткий стержень длиной $3a$, к которому на расстояниях a и $2a$ от одного из концов прикреплены вертикальные нити, перекинутые через блоки. К противоположным концам нитей прикреплены грузы массами m_1 и m_2. К концам стержня прикреплены грузы массами m_3 и m_4. Известно, что $m_1 = 1$ кг и $m_3 = 2$ кг. Какими должны быть массы m_2 и m_4, чтобы система находилась в равновесии?

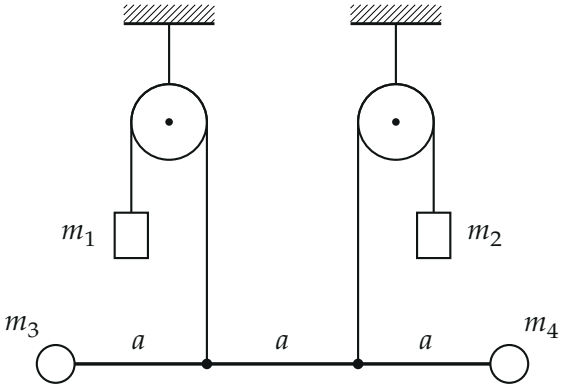


Рисунок условия

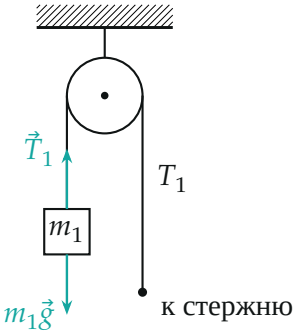
▲ **Решение. Что происходит.** Система неподвижна, значит, для стержня выполнены два условия равновесия: сумма всех сил равна нулю и сумма моментов относительно любой точки равна нулю. На стержень действуют четыре вертикальные силы: вниз — веса грузов m_3 и m_4 на концах, вверх — силы натяжения двух нитей. Нити нужны для того, чтобы связать неизвестные массы m_1, m_2 с силами на стержне: через блок нить передаёт силу, равную весу груза.

Обозначения. T_1, T_2 — силы натяжения нитей, прикреплённых на расстояниях a и $2a$ от левого конца (того, где висит m_3). Ось y — вверх. Точка O — левый конец стержня, x — расстояние от него вдоль стержня.

1. Натяжение нити равно весу её груза. Блок идеальный (невесомый, без трения), поэтому сила натяжения нити по обе стороны блока одна и та же. Груз m_1 покоится: сила тяжести $m_1 g$ вниз уравновешена

натяжением T_1 вверх (второй закон Ньютона для груза в проекции на y при нулевом ускорении). Так же для m_2:

$$T_1 = m_1 g, \qquad T_2 = m_2 g.$$



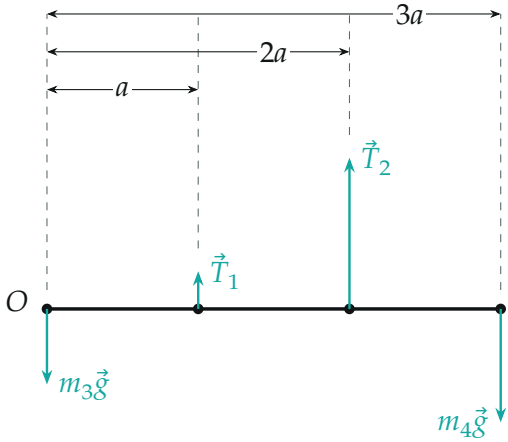
Нить передаёт через блок ту же силу T_1 и на груз, и на стержень

2. Сумма сил на стержень равна нулю. Стержень лёгкий, его вес не учитываем (закон: первое условие равновесия, сумма проекций сил на y):

$$T_1 + T_2 - m_3 g - m_4 g = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 + m_2 = m_3 + m_4. \qquad (1)$$

3. Сумма моментов относительно O равна нулю (второе условие равновесия). Сила $m_3 g$ приложена в самой точке O, её момент равен нулю. Силы T_1 и T_2 вращают стержень вокруг O в одну сторону (против часовой, если смотреть, как на рисунке), вес $m_4 g$ — в другую. Плечи равны расстояниям до точки приложения, так как все силы вертикальны:

$$T_1 \cdot a + T_2 \cdot 2a - m_4 g \cdot 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 + 2m_2 = 3m_4. \qquad (2)$$



Силы на стержне и плечи относительно левого конца O

4. Решаем систему. Из (1): $m_4 = m_1 + m_2 - m_3$. Подставим в (2):

$$m_1+2m_2 = 3m_1+3m_2-3m_3 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 3m_3-2m_1 = 3\cdot2-2\cdot1 = 4\,\text{кг}.$$

Тогда

$$m_4 = m_1 + m_2 - m_3 = 1 + 4 - 2 = 3\ \text{кг}.$$

Обратите внимание. Нить, перекинутая через блок, тянет стержень вверх силой T (вес одного груза), а не $2T$: блок прикреплён к потолку, а стержня касается только один конец нити.

Проверка. Моменты относительно правого конца: вес m_3g с плечом $3a$ по часовой стрелке должен равняться сумме моментов T_1 (плечо $2a$) и T_2 (плечо a) против: $3m_3 = 2m_1 + m_2$, то есть $6 = 2 + 4$ — верно. Размерность: масса из массы. Смысл: чтобы стержень не вращался, m_2 должно быть тем больше, чем тяжелее левый груз m_3, и тем меньше, чем больше m_1 (у этого груза плечо $2a$ в ту же сторону).

Ответ. $m_2 = 3m_3 - 2m_1 = 4$ кг; $m_4 = 2m_3 - m_1 = 3$ кг.