Катушка с канатом на горке

Задача 5. [МОШ 2012/13, 9 класс, задача 5] Рабочий катит катушку с канатом вверх по плоской горке, образующей угол $\alpha \approx 6^\circ$ с горизонтом, одновременно разматывая канат (см. рис). Внешний радиус катушки равен $R = 60$ см, внутренний — $r = 40$ см, а масса катушки с канатом равна $m = 100$ кг. Катушка катится без проскальзывания и делает один полный оборот за время $t = 4$ с, причем её центр движется равномерно. С какой скоростью идёт рабочий? Какой выигрыш в силе он получает при таком подъёме? С какой силой он тянет за конец каната? Какую полезную мощность он развивает? Массой размотанного участка каната пренебречь, считать $\sin 6^\circ \approx 0{,}10$.

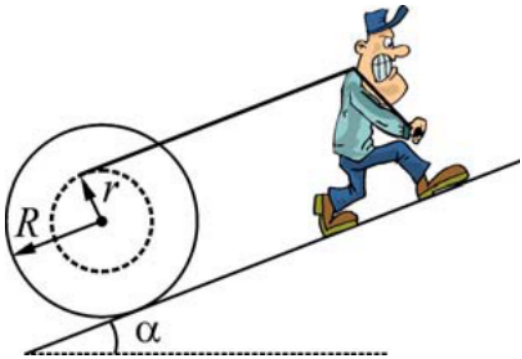
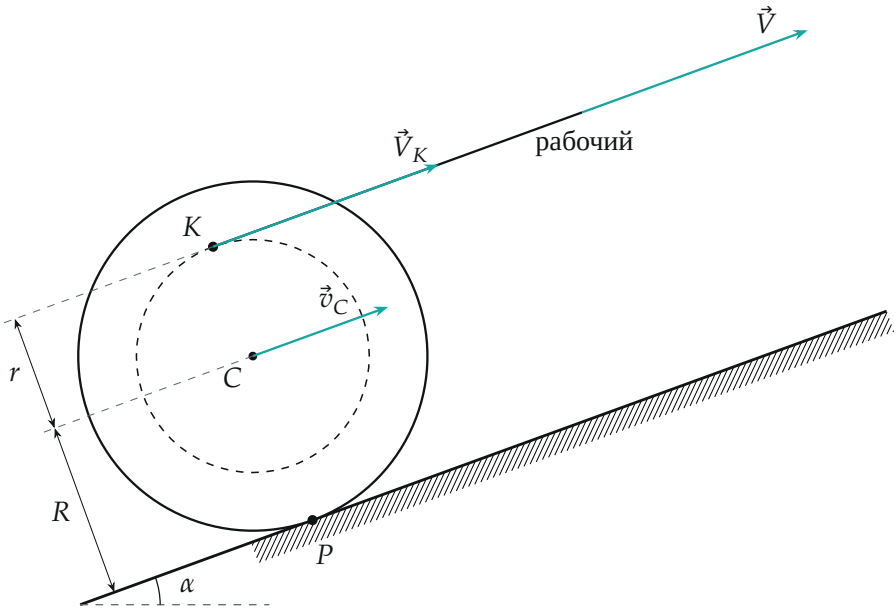


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Катушка катится без проскальзывания, поэтому в каждый момент точка, которой она касается горки, неподвижна, и всё движение катушки — это поворот вокруг неё (мгновенный центр скоростей). Скорость любой точки равна угловой скорости, умноженной на расстояние до точки касания. Канат сходит с внутреннего барабана: ближе всего к рабочему верхняя точка внутренней окружности, она дальше от точки касания, чем центр катушки, а значит, движется быстрее центра. Рабочий идёт вместе с концом каната, поэтому его скорость — это скорость той точки каната. Силу найдём из того, что центр

катушки движется равномерно: все силы и моменты уравновешены, а работа рабочего идёт только на подъём катушки.

Обозначения. ω — угловая скорость катушки; v_C — скорость её центра C; V — скорость рабочего (конца каната); F — сила, с которой рабочий тянет канат (вдоль горки); P — точка касания катушки с горкой; N — сила реакции горки, $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя в точке P. Принимаем $g = 10$ м/с^2.



Скорости: точка касания P неподвижна, скорость растёт пропорционально расстоянию до P (угол горки на рисунке увеличен)

1. Угловая скорость. Один оборот (2π рад) за время t:

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{4\text{ с}} \approx 1{,}57 \text{ рад/с}.$$

2. Скорость центра катушки. Центр C находится на расстоянии R от неподвижной точки P:

$$v_C = \omega R \approx 0{,}94 \text{ м/с}.$$

3. Скорость рабочего. Канат сходит с внутреннего барабана в его верхней точке K. Она лежит на линии, перпендикулярной горке, на расстоянии $R + r$ от P, а скорость направлена вдоль горки — как раз вдоль каната. Нерастяжимый натянутый канат движется как целое со скоростью этой точки, и рабочий идёт с той же скоростью:

$$V = \omega\,(R + r) = \frac{2\pi R}{t}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 0{,}942 \cdot 1{,}67 \text{ м/с} \approx 1{,}57 \text{ м/с}.$$

Рабочий идёт в $\dfrac{R + r}{R} = 1{,}67$ раза быстрее центра катушки.

4. Выигрыш в силе (золотое правило механики). Катушка катится равномерно, скорость не растёт, трения качения и проскальзывания нет, значит, вся работа рабочего идёт на подъём катушки. За малое время Δt рабочий проходит путь $V\Delta t$ с силой F, а центр катушки поднимается вдоль горки на $v_C\Delta t$ против составляющей силы тяжести $mg\sin\alpha$:

$$F\,V\,\Delta t = mg\sin\alpha \cdot v_C\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad F = mg\sin\alpha\,\frac{v_C}{V} = \frac{mg\sin\alpha}{1 + r/R}.$$

Выигрыш в силе — отношение веса катушки к силе рабочего:

$$k = \frac{mg}{F} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 10 \cdot \frac{5}{3} \approx 16{,}7.$$

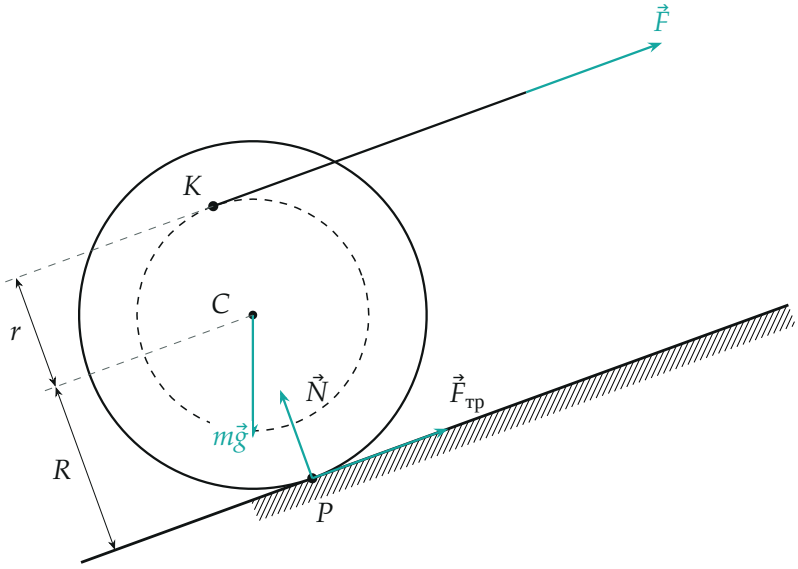
Он складывается из двух частей: наклонная плоскость даёт выигрыш $1/\sin\alpha = 10$, а канат, идущий от внутреннего барабана, — ещё в $1 + r/R \approx 1{,}67$ раза.

5. Сила, с которой рабочий тянет канат.

$$F = \frac{mg}{k} = \frac{100 \cdot 10}{16{,}7} = 60 \text{ Н}.$$

6. Полезная мощность — это мощность силы F на пути рабочего:

$$P = FV = 60 \cdot 1{,}57 \approx 94 \text{ Вт}.$$



Силы на катушку: $\vec{F}$ — натяжение каната, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ — реакция горки (силы не в масштабе)

Обратите внимание. (1) Мгновенный центр скоростей — точка касания P, а не центр катушки: поэтому скорость конца каната не равна v_C и не равна $2v_C$ (так движется только самая верхняя точка внешней окружности). (2) Если бы канат сходил с внешнего барабана, получилось бы $V = 2v_C$ и $k = 2/\sin\alpha = 20$; внутренний барабан даёт множитель $1 + r/R \approx 1{,}67$ вместо 2. (3) Ускорения g в условии нет, взято $g = 10$ м/с^2, как принято при $\sin 6° \approx 0{,}10$.

Проверка. Другим путём — уравновесим моменты сил относительно центра катушки (она вращается равномерно, поэтому сумма моментов равна нулю). Сила F на плече r вращает катушку по часовой стрелке, трение покоя $F_{тр}$ в точке P на плече R — против: $Fr = F_{тр}R$. По второму закону Ньютона для центра вдоль горки (ускорение нулевое): $F + F_{тр} = mg\sin\alpha$. Из двух уравнений $F = \dfrac{mg\sin\alpha}{1 + r/R} = 60$ Н, $F_{тр} = 40$ Н — тот же результат, сила трения направлена вверх по горке. Мощность по другой формуле: $mg\sin\alpha \cdot v_C = 100 \cdot 0{,}94 \approx 94$ Вт — совпадает с FV. Размерности: Н · м/с = Вт.

Ответ. $V = \omega(R + r) = 2\pi(R + r)/t \approx 1{,}57$ м/с; выигрыш в силе $k = (1 + r/R)/\sin\alpha \approx 16{,}7$; $F = mg/k = 60$ Н; $P = FV \approx 94$ Вт.