Три кубика в воде

Задача 6. [МОШ 2012/13, 9 класс, задача 6] У школьника Вовы есть три кубика разных размеров. Длина ребра первого кубика равна $l = 10$ см, второго — $2l = 20$ см, а третьего — $3l = 30$ см. Вова поставил кубики один на другой так, как показано на рисунке слева, погрузил в воду и отпустил. При установившемся равновесии самый большой кубик полностью погрузился в воду, а два других находились над водой. Кубики однородны и сделаны из одного и того же материала.

1) Определите плотность этого материала, если известно, что плотность воды равна 1000 кг/м^3.
2) Вова хочет погрузить в воду два кубика (маленький и средний), рисунок справа. Определите, где будет находиться граница раздела кубиков: над водой, под водой или точно на уровне воды. Если над водой или под водой, то вычислите, на каком расстоянии от поверхности воды окажется граница раздела кубиков.

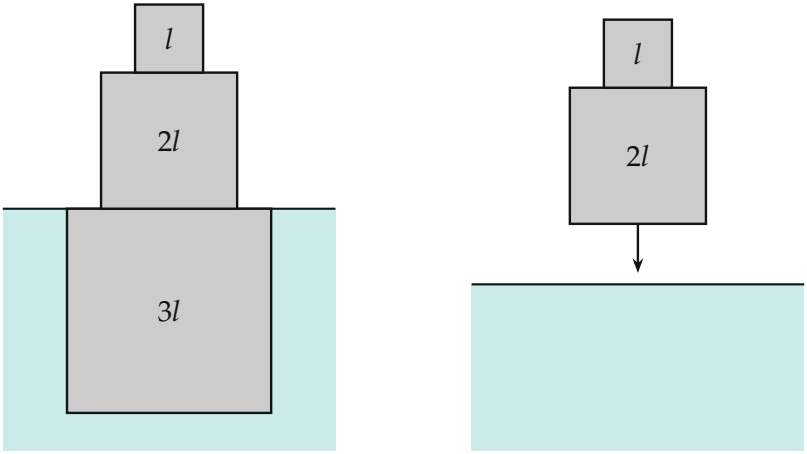
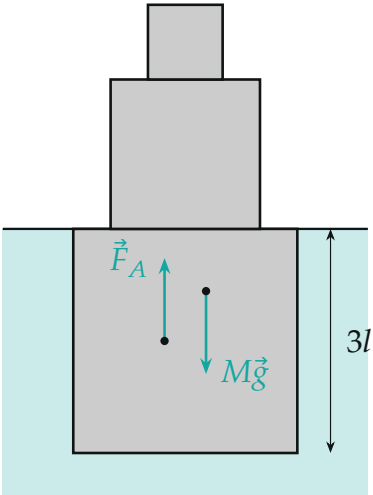


Рисунок условия: слева — три кубика на воде (равновесие), справа — два кубика над водой перед погружением

▲ **Решение.** **Что происходит.** Плавающее тело неподвижно: сила тяжести уравновешена силой Архимеда. Сила Архимеда равна весу вытесненной воды, то есть пропорциональна объёму погружённой части.

Объёмы кубиков относятся как кубы рёбер, $1 : 8 : 27$, а материал один и тот же, поэтому массы относятся так же. Для каждой стопки уравнение равновесия связывает плотность материала с объёмом погружённой части; в первом случае этот объём известен (самый большой кубик целиком), во втором — нет, но он и есть то, что нужно найти.

Обозначения. ρ — плотность материала кубиков, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, $V_1 = l^3$, $V_2 = 8l^3$, $V_3 = 27l^3$ — объёмы малого, среднего и большого кубиков; $V_{\text{погр}}$ — объём погружённой в воду части стопки; g — ускорение свободного падения.



Силы на стопку: тяжесть $M\vec{g}$ приложена в центре масс, сила Архимеда $\vec{F}_A$ — в центре погружённой части; по модулю они равны

Пункт 1.

1. Закон равновесия. Стопка покоится, сила тяжести всей стопки равна силе Архимеда (первое условие равновесия, сумма проекций сил на вертикаль равна нулю). Масса стопки $M = \rho\,(V_1 + V_2 + V_3) = 36\rho l^3$. Погружён целиком только большой кубик, поэтому вытеснен объём $V_3 = 27l^3$:

$$36\rho l^3 g = \rho_0 \cdot 27l^3 g.$$

2. Плотность.

$$\rho = \frac{27}{36}\rho_0 = \frac{3}{4}\rho_0 = 750 \text{ кг/м}^3.$$

Объём l^3 и ускорение g сократились: плотность не зависит от размеров, только от доли погружённого объёма.

Пункт 2.

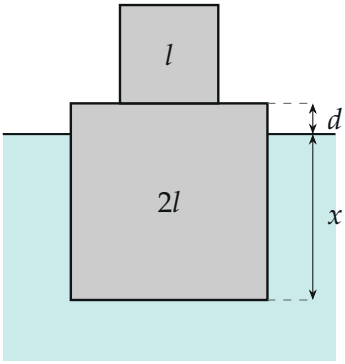
3. Куда придёт стопка из двух кубиков. Объём пары $V_1 + V_2 = 9l^3$, масса $M' = 9\rho l^3$. Условие плавания: $9\rho l^3 g = \rho_0 V_{\text{погр}} g$, откуда

$$V_{\text{погр}} = \frac{9\rho}{\rho_0} l^3 = 9 \cdot \frac{3}{4} l^3 = \frac{27}{4} l^3 = 6{,}75\, l^3.$$

Чтобы понять, где граница кубиков, сравним это с объёмом всего среднего кубика, $8l^3$. Погружённая часть меньше ($6{,}75 < 8$): среднему кубику не хватает погрузиться целиком, значит, граница раздела над водой.

4. Глубина погружения среднего кубика. Он погружён своим нижним основанием площадью $(2l)^2 = 4l^2$ на глубину x ($x < 2l$), так что $V_{\text{погр}} = 4l^2 x$:

$$4l^2 x = \frac{27}{4} l^3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{27}{16} l \approx 1{,}69\, l \approx 16{,}9 \text{ см}.$$



Два кубика на плаву: x — глубина погружения среднего кубика, d — высота границы над водой

5. Расстояние от поверхности воды до границы. Высота среднего кубика $2l$, из неё под водой x, поэтому граница находится выше уровня воды на

$$d = 2l - x = 2l - \frac{27}{16}l = \frac{5}{16}l \approx 3{,}1 \text{ см}.$$

Обратите внимание. Нельзя считать, что в части 2 сила Архимеда действует на всю стопку: в воде лишь часть среднего кубика. Сначала нужно проверить, не уходит ли граница под воду, сравнив $V_{\text{погр}}$ с $8l^3$ (если бы получилось больше $8l^3$, началось бы погружение малого кубика, и расчёт шёл бы иначе).

Проверка. Размерность: ρ в кг/м^3 — отношение плотностей безразмерно. Предельный случай: при $\rho = \rho_0$ стопка погрузилась бы целиком; при $\rho = \frac{3}{4}\rho_0$ первая стопка погружена на $27/36 = \frac{3}{4}$ своего объёма, как и должно быть для однородного тела с долей погружения ρ/ρ_0 — и во второй стопке доля та же: $6{,}75/9 = \frac{3}{4}$. Условие, что граница на уровне воды, выполнялось бы при $\rho = \frac{8}{9}\rho_0 \approx 0{,}89\rho_0$; наше ρ меньше, значит, стопка выше и граница над водой — согласуется.

Ответ. 1) $\rho = 3\rho_0/4 = 750$ кг/м^3; 2) граница раздела кубиков над водой на расстоянии $5l/16 \approx 3{,}1$ см от поверхности.