Время извлечения капсулы со снегом

Задача 7. [МОШ 2012/13, 9 класс, задача 7] По счастливой случайности отличнику Грише и первой красавице Арише выпало вместе делать лабораторную работу по физике. В работе требовалось поместить капсулу со снегом в нагреваемый калориметр и извлечь ее точно в тот момент, когда весь снег растает, а температура образовавшейся воды все еще будет равна 0 °C.

Гриша аккуратно рассчитал точное время начала и завершения измерений, включил печь, поместил 0,5 кг снега в калориметр и ровно в 9:00 по московскому времени начал измерения. «Скучно», — примерно через минуту подумала Ариша, и подсыпала немного снега в калориметр. Гриша в ужасе смотрел на график и печально думал «Красота требует жертв…»

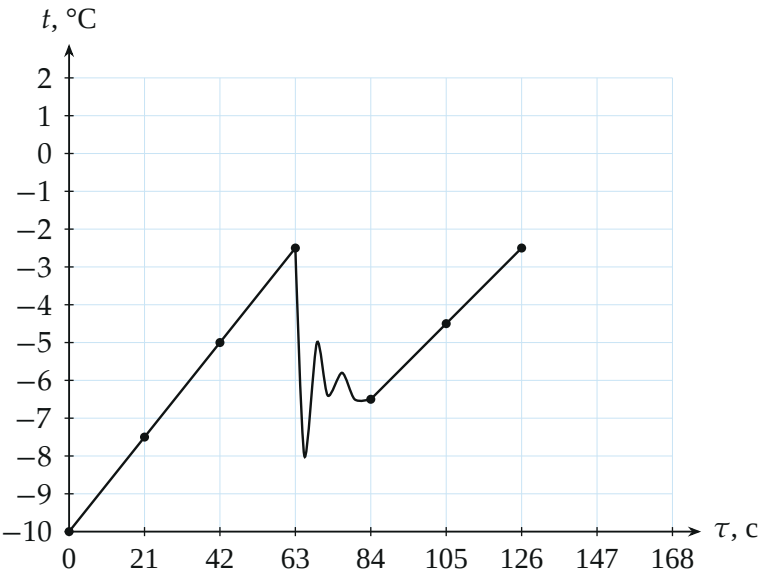


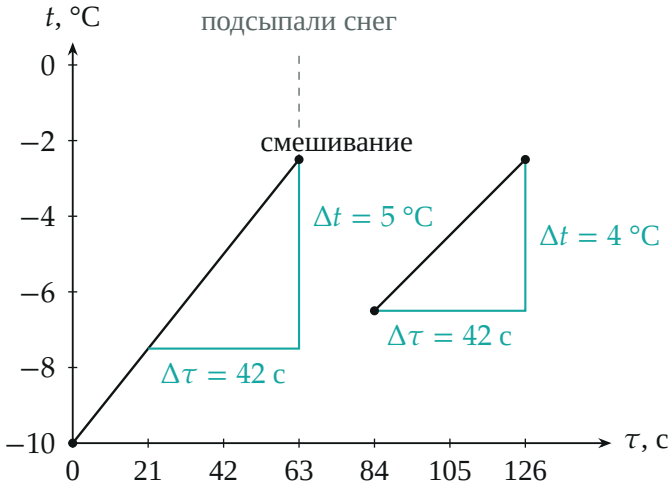
Рисунок условия: температура содержимого t в зависимости от времени τ с начала измерений

Используя график, определите, каково теперь должно быть точное московское время извлечения капсулы из калориметра, чтобы выполнить условия лабораторной работы.

У снега удельная теплота плавления $\lambda = 330$ кДж/кг, а удельная теплоемкость $c = 2{,}1$ кДж/(кг·°C).

▲ **Решение. Что происходит.** Печь работает с постоянной мощностью, и всё тепло идёт на нагревание содержимого калориметра, поэтому температура на графике растёт по прямой: чем больше теплоёмкость содержимого, тем медленнее. До добавки снега теплоёмкость определена известной массой 0,5 кг, и по наклону первого участка можно найти мощность печи. После добавки наклон стал меньше: масса выросла. По новому наклону при той же мощности находим новую массу, затем считаем, сколько ещё времени нужно, чтобы довести снег до 0 °C и целиком расплавить. Резкий провал в момент добавки и сам процесс смешивания нам не нужны — только прямые участки до и после.

Обозначения. τ — время с начала опыта, t — температура (оси графика); $m_1 = 0{,}5$ кг — начальная масса снега, m_2 — масса после добавки; P — мощность печи; k_1, k_2 — наклоны (скорости роста температуры) графика до и после добавки. Потерями тепла в окружающую среду и теплоёмкостью калориметра с капсулой пренебрегаем.



Наклоны прямых участков: в обоих случаях берём интервал $\Delta\tau = 42$ с

1. Мощность печи. Пока снег нагревается, тепло печи за время $\Delta\tau$ равно $c\,m_1\,\Delta t$, то есть $P\,\Delta\tau = c\,m_1\,\Delta t$. Наклон первого участка берём

по графику: за $\Delta\tau = 42$ с температура растёт на $\Delta t = 5$ °C, так что $k_1 = \frac{5}{42}\frac{^\circ\text{C}}{\text{с}} = \frac{2{,}5}{21}\frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}$:

$$P = c\,m_1\,k_1 = 2100 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{5}{42}\ \text{Вт} = 125\ \text{Вт}.$$

2. Масса после добавки. Второй участок: за те же 42 с температура растёт на 4 °C, $k_2 = \frac{4}{42}\frac{^\circ\text{C}}{\text{с}} = \frac{2}{21}\frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}$. Мощность прежняя, значит, $P = c\,m_2\,k_2$:

$$m_2 = \frac{P}{c\,k_2} = \frac{125}{2100 \cdot \frac{4}{42}}\ \text{кг} = 0{,}625\ \text{кг}.$$

Ариша добавила 0,125 кг снега.

3. Догрев до 0 °C. В момент $\tau = 126$ с температура $-2{,}5$ °C. Чтобы нагреть массу m_2 до 0 °C, нужно

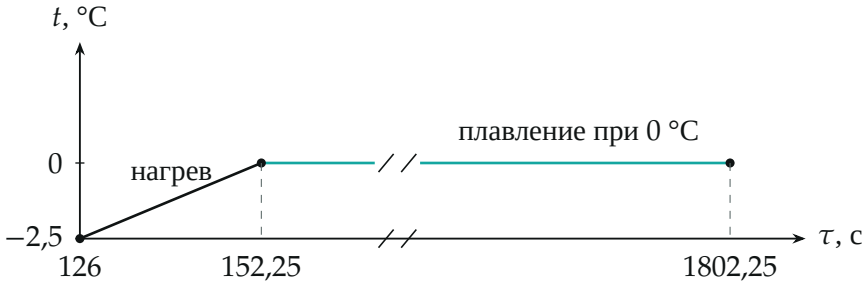
$$Q_1 = c\,m_2 \cdot 2{,}5 = 2100 \cdot 0{,}625 \cdot 2{,}5\ \text{Дж} = 3281{,}25\ \text{Дж},$$

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{P} = \frac{3281{,}25}{125}\ \text{с} = 26{,}25\ \text{с}.$$

4. Плавление. При 0 °C температура не растёт, пока не растает весь снег (энергия идёт на разрыв связей в кристаллах льда):

$$Q_2 = \lambda m_2 = 330000 \cdot 0{,}625\ \text{Дж} = 206250\ \text{Дж},$$

$$\tau_2 = \frac{Q_2}{P} = \frac{206250}{125}\ \text{с} = 1650\ \text{с}.$$



Конец опыта (масштаб по времени условный, ось прервана): нагрев до 0 °C, затем плавление

5. Момент извлечения. Время от начала измерений:

$$\tau = 126 + 26{,}25 + 1650 = 1802{,}25 \text{ с} = 30 \text{ мин } 2{,}25 \text{ с}.$$

Опыт начался в 9:00, значит, капсулу нужно извлечь в 9:30:02,25.

Обратите внимание. (1) Время плавления намного больше времени нагрева (1650 с против 26 с): удельная теплота плавления λ огромна по сравнению с теплотой нагрева на один градус. (2) Точки графика лежат в узлах сетки, поэтому наклоны читаются точно: $5/42$ и $4/42$ °C/с.

Проверка. Тепловой баланс смешивания. Продолжим второй прямой участок назад до момента добавки $\tau = 63$ с: $-6{,}5 - \frac{4}{42} \cdot 21 = -8{,}5$ °C — такой была бы температура смеси, если бы смешивание прошло мгновенно (тепло печи за 21 с уже учтено наклоном). Исходный снег остыл с $-2{,}5$ до $-8{,}5$ °C, добавленный нагрелся от $t_{\text{сн}}$ до $-8{,}5$ °C: $c\,m_1 \cdot 6 = c\,\Delta m\,(-8{,}5 - t_{\text{сн}})$, при $\Delta m = 0{,}125$ кг $0{,}5 \cdot 6 = 0{,}125\,(-8{,}5 - t_{\text{сн}})$, откуда $t_{\text{сн}} = -32{,}5$ °C — правдоподобная температура снега с мороза, значит, m_2 найдена согласованно. Размерность: Дж/Вт = с. Без Ариши Гриша извлёк бы капсулу в $\tau = \dfrac{cm_1 \cdot 10 + \lambda m_1}{P} = \dfrac{10500 + 165000}{125} = 1404$ с = 23 мин 24 с, то есть в 9:23:24; подсыпанный снег сдвинул момент примерно на 6,6 мин.

Ответ. Капсулу нужно извлечь в 9 часов 30 минут 2,25 секунды по московскому времени.