Резисторы с перемычками

Задача 8. [МОШ 2012/13, 9 класс, задача 8] Система, изображённая на рисунке, состоит из резисторов двух типов, с сопротивлениями $R = 2r = 200$ Ом и $r = 100$ Ом, источника постоянного напряжения $U = 9$ В и шести перемычек (проводов, сопротивлением которых можно пренебречь). Найдите силы токов через все резисторы, перемычки и источник напряжения.

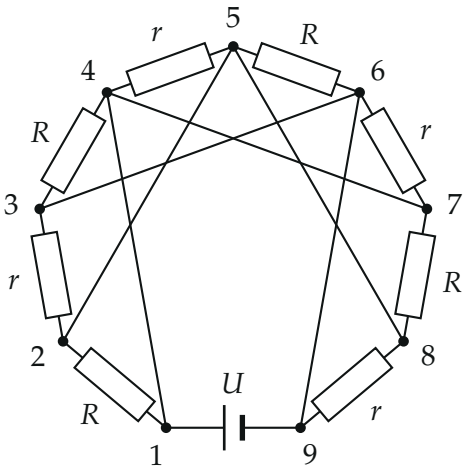


Рисунок условия: узлы 1–9, резисторы R и r между соседними узлами, перемычки — прямые линии внутри (узлы 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6, 4 и 7, 5 и 8, 6 и 9)

▲ **Решение. Что происходит.** Перемычка — идеальный провод, на нём нет падения напряжения, поэтому её концы имеют один и тот же потенциал. Шесть перемычек сливают девять узлов в три: $A = \{1, 4, 7\}$, $B = \{2, 5, 8\}$, $C = \{3, 6, 9\}$. Источник стоит между узлами 9 и 1, то есть между C и A: напряжение A–C равно U. Каждый резистор соединяет два из трёх объединённых узлов, значит, схема — три узла и восемь резисторов, а неизвестен лишь потенциал узла B. Его даст закон сохранения заряда для узла B, потом по закону Ома найдём токи резисторов, а токи перемычек — из баланса токов в исходных девяти узлах.

Обозначения. Ток I_{ij} — ток из узла i в узел j (отрицательный — течёт обратно), как в ответе. φ_A, φ_B, φ_C — потенциалы объединённых узлов;

$\varphi_C = 0$. Полярность источника такая, что узел 1 — плюс (на рисунках у источника длинная пластина — плюс): тогда $\varphi_A = U = 9$ В и все знаки совпадают с официальным ответом (при обратной полярности все токи сменят знак). Сопротивления удобно брать в килоомах: $R = 0{,}2$ кОм, $r = 0{,}1$ кОм — тогда В/кОм = мА.

1. Объединяем узлы и перерисовываем. Резистор между узлами i и j обозначим R_{ij} или r_{ij} (по его типу). Резисторы между объединёнными узлами:

- между A и B: 1–2 (R), 4–5 (r), 7–8 (R) — три параллельных;
- между B и C: 2–3 (r), 5–6 (R), 8–9 (r) — три параллельных;
- между C и A: 3–4 (R), 6–7 (r) — два параллельных, и параллельно им источник U.

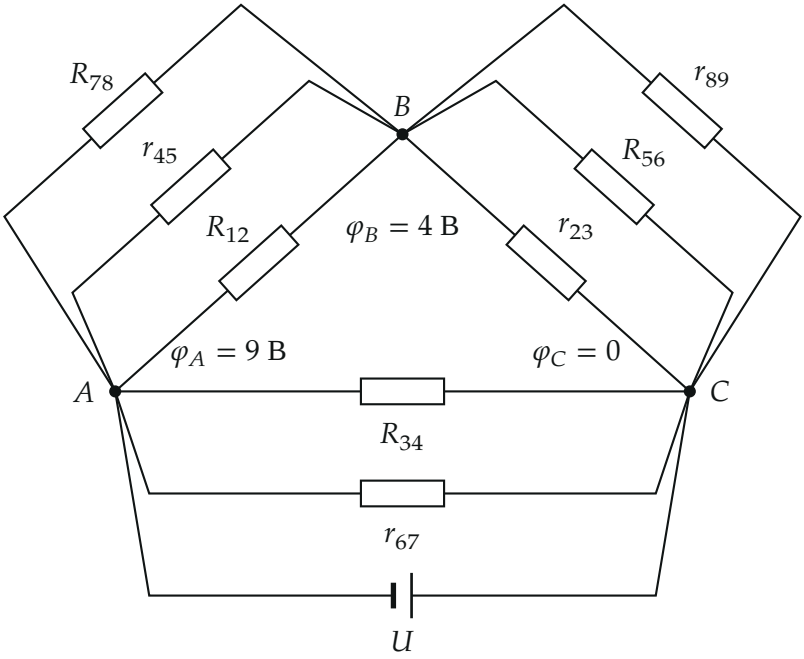


Схема после слияния узлов (индексы — номера узлов исходной схемы); потенциалы найдены ниже

2. Потенциал узла B**.** Проводимости групп: между A и B $\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{R} =$

$\frac{1}{0{,}2}+\frac{1}{0{,}1}+\frac{1}{0{,}2}=20$ мСм; между B и C $\frac{1}{r}+\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=25$ мСм. Закон сохранения заряда для узла B (сколько втекает из A, столько вытекает в C):

$$20\,(\varphi_A-\varphi_B)=25\,(\varphi_B-\varphi_C)\quad\Rightarrow\quad 20\,(9-\varphi_B)=25\,\varphi_B,$$

$$180=45\,\varphi_B\quad\Rightarrow\quad \varphi_B=4\text{ В}.$$

3. Токи резисторов (закон Ома для участка цепи, $I_{ij}=(\varphi_i-\varphi_j)/R_{ij}$). Напряжения: $\varphi_A-\varphi_B=5$ В, $\varphi_B-\varphi_C=4$ В, $\varphi_C-\varphi_A=-9$ В.

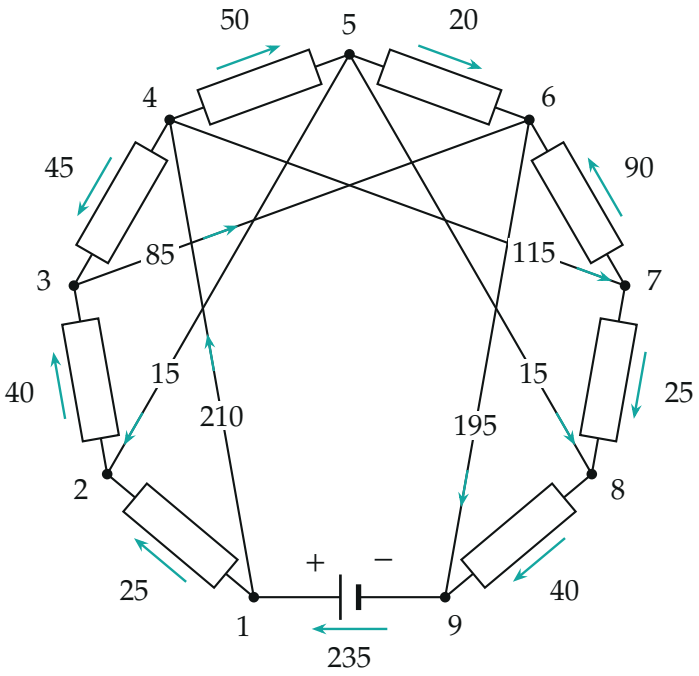
$$I_{12}=\frac{5}{0{,}2}=25\text{ мА},\quad I_{45}=\frac{5}{0{,}1}=50\text{ мА},\quad I_{78}=\frac{5}{0{,}2}=25\text{ мА},$$
$$I_{23}=\frac{4}{0{,}1}=40\text{ мА},\quad I_{56}=\frac{4}{0{,}2}=20\text{ мА},\quad I_{89}=\frac{4}{0{,}1}=40\text{ мА},$$
$$I_{34}=\frac{-9}{0{,}2}=-45\text{ мА},\quad I_{67}=\frac{-9}{0{,}1}=-90\text{ мА}.$$

Знак минус у I_{34} и I_{67}: ток течёт от 4 к 3 и от 7 к 6, то есть из A в C (потенциал A выше).

4. Токи перемычек — правило узлов в каждом из исходных узлов (сумма втекающих токов равна сумме вытекающих). Начинаем с узла 2, где известны все токи, кроме тока перемычки, и идём по цепочке:

- узел 2: втекает $I_{12}=25$ мА, вытекает $I_{23}=40$ мА, значит, по перемычке $5\to 2$ втекает $I_{52}=40-25=15$ мА;
- узел 5: втекает $I_{45}=50$ мА; вытекают $I_{56}=20$ мА и $I_{52}=15$ мА, значит, по перемычке $5\to 8$ уходит $I_{58}=50-20-15=15$ мА;
- узел 3: втекают $I_{23}=40$ мА и 45 мА (из 4: $I_{34}=-45$), вытекает по перемычке $3\to 6$: $I_{36}=40+45=85$ мА;
- узел 6: втекают $I_{56}=20$ мА, $I_{36}=85$ мА и 90 мА (из 7: $I_{67}=-90$); по перемычке $6\to 9$ уходит $I_{69}=20+85+90=195$ мА;
- узел 9: втекают $I_{89}=40$ мА и $I_{69}=195$ мА, значит, через источник $9\to 1$ течёт $I_{91}=235$ мА;
- узел 1: втекает 235 мА, вытекает $I_{12}=25$ мА, значит, по перемычке $1\to 4$: $I_{14}=235-25=210$ мА;

- узел 4: втекает 210 мА; вытекают 45 мА (к 3) и $I_{45} = 50$ мА, по перемычке $4 \to 7$ уходит $I_{47} = 210 - 45 - 50 = 115$ мА.



Токи во всех элементах исходной схемы, мА: стрелки — истинные направления токов, плюс у источника на стороне узла 1

Обратите внимание. (1) Токи через перемычки не находятся из закона Ома — на них нет напряжения, сопротивление нулевое, и эти токи определяются только балансом в узлах. (2) Отрицательные I_{34} и I_{67} — не ошибка: направления $i \to j$ выбирались по порядку номеров, а в действительности ток идёт обратно.

Проверка. Баланс в оставшихся узлах: узел 8: втекают $I_{78} = 25$ мА и $I_{58} = 15$ мА, вытекает $I_{89} = 40$ мА — верно. Узел 7: втекает $I_{47} = 115$ мА, вытекают 90 мА (к 6) и $I_{78} = 25$ мА — верно. Общий ток из A в B равен $25 + 50 + 25 = 100$ мА и равен току из B в C: $40 + 20 + 40 = 100$ мА; из A в C идёт $45 + 90 = 135$ мА; сумма $100 + 135 = 235$ мА равна току источника. Эквивалентное сопротивление по току источника: $R_{\text{экв}} =$

$U/I = 9/0{,}235 \approx 38{,}3$ Ом. Напрямую: у пути A–B–C проводимости групп 20 и 25 мСм дают сопротивления 50 и 40 Ом, последовательно 90 Ом; у прямых резисторов A–C сопротивление $\left(\dfrac{1}{200}+\dfrac{1}{100}\right)^{-1} \approx 66{,}7$ Ом. Эти два пути параллельны:

$$R_{\text{экв}} = \frac{90 \cdot 66{,}7}{90 + 66{,}7} \approx 38{,}3 \text{ Ом} \quad \text{— совпало.}$$

Ответ. Токи через резисторы: $I_{12} = 25$ мА, $I_{23} = 40$ мА, $I_{34} = -45$ мА, $I_{45} = 50$ мА, $I_{56} = 20$ мА, $I_{67} = -90$ мА, $I_{78} = 25$ мА, $I_{89} = 40$ мА; токи через перемычки: $I_{52} = 15$ мА, $I_{58} = 15$ мА, $I_{36} = 85$ мА, $I_{69} = 195$ мА, $I_{47} = 115$ мА, $I_{14} = 210$ мА; ток через источник $I_{91} = 235$ мА.