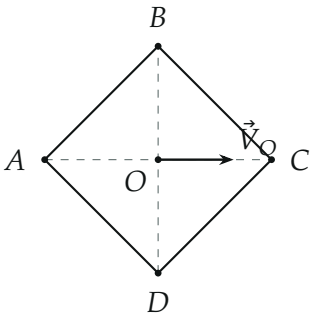
Квадратная пластинка скользит

Задача 1. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 1] По горизонтальной плоскости скользит квадратная пластинка $ABCD$. В некоторый момент времени вершина A пластинки движется со скоростью $\vec{V}_A$, равной по модулю 5 м/с, а соседняя вершина B — со скоростью $\vec{V}_B$, равной по модулю 1 м/с. При этом скорость $\vec{V}_O$ точки O — центра пластинки — направлена перпендикулярно прямой BD, являющейся диагональю квадрата. Найдите проекцию скорости $\vec{V}_O$ на направление AC в данный момент времени.

Рисунка в условии нет; поясняющий рисунок — квадрат, его диагонали и скорость центра.



Квадрат $ABCD$: $\vec{V}_O \perp BD$, значит, $\vec{V}_O \parallel AC$

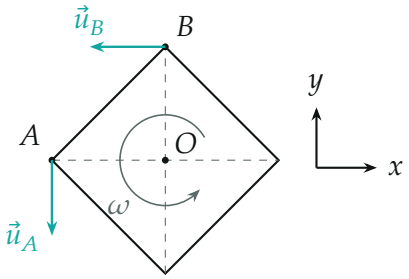
▲ **Решение.** **Что происходит.** Пластинка — твёрдое тело, которое и перемещается, и поворачивается. Скорость любой её точки складывается из скорости центра $\vec{V}_O$ (поступательная часть) и скорости вращения вокруг центра $\vec{\imath}$ (вращательная часть). У вершин квадрата расстояние до центра одно и то же, $OA = OB = d$, поэтому модуль вращательной скорости у всех вершин один и тот же, $u = \omega d$, а направлена она перпендикулярно радиусу, проведённому из центра.

Обозначения. d — половина диагонали; ω — угловая скорость пластинки (положительная, если вращение против часовой стрелки); $w = \omega d$ — проекция вращательной скорости вершины на касательное направление, со знаком; V_O — проекция скорости центра на направление AC (её и ищем).

1. Оси. Ось x направим вдоль AC от A к C, ось y — вдоль OB (перпендикулярно AC в плоскости пластинки). Оси проводим так, потому что по условию $\vec{V}_O \perp BD$, то есть $\vec{V}_O$ лежит вдоль AC: тогда у $\vec{V}_O$ одна ненулевая проекция V_O на x, а на y проекция равна нулю.

2. Вращательные скорости вершин. Для вращения против часовой стрелки скорость вращательного движения точки с радиус-вектором (x, y) равна $\omega(-y, x)$. Вершины: $A(-d, 0)$, $B(0, d)$. Тогда

$$\vec{u}_A = \omega(0, -d) = (0, -w), \qquad \vec{u}_B = \omega(-d, 0) = (-w, 0).$$



Вращательные скорости вершин A и B при $\omega > 0$ (против часовой стрелки)

3. Скорость вершины B. Складываем поступательную и вращательную части в проекциях:

$$V_{Bx} = V_O - w, \qquad V_{By} = 0, \qquad \text{значит} \qquad |V_O - w| = V_B = 1 \text{ м/с}.$$

4. Скорость вершины A. Так же:

$$V_{Ax} = V_O, \qquad V_{Ay} = -w, \qquad \text{значит} \qquad V_O^2 + w^2 = V_A^2 = 25 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

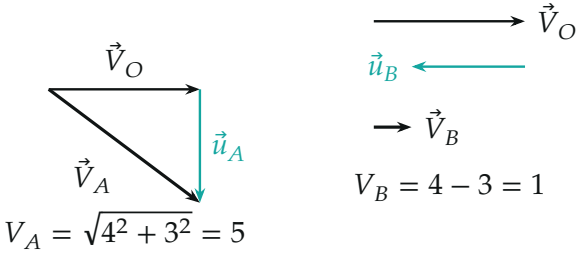
5. Решение системы. Из пункта 3: $V_O - w = \pm 1$ м/с; подставим $w = V_O \mp 1$ в пункт 4:

$$V_O^2 + (V_O \mp 1)^2 = 25 \;\Rightarrow\; 2V_O^2 \mp 2V_O - 24 = 0 \;\Rightarrow\; V_O^2 \mp V_O - 12 = 0.$$

Для верхнего знака ($V_O - w = +1$): $V_O^2 - V_O - 12 = 0$, откуда $V_O = 4$ или $V_O = -3$ м/с. Для нижнего знака ($V_O - w = -1$): $V_O^2 + V_O - 12 = 0$,

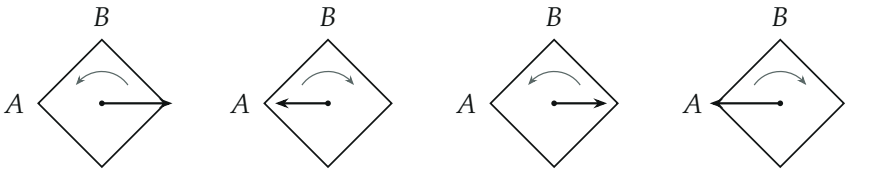
откуда $V_O = 3$ или $V_O = -4$ м/с. Находим и $w = V_O \mp 1$:

V_O, м/с	4	−3	3	−4
w, м/с	3	−4	4	−3



Случай $V_O = 4$ м/с, $w = 3$ м/с: сложение скоростей для A (слева) и для B (справа); масштаб 0,5 см на 1 м/с

6. Смысл четырёх решений. Знак w — направление вращения: при $w > 0$ пластинка вращается против часовой стрелки, при $w < 0$ — по часовой. Знак V_O — куда движется центр: от A к C (+) или обратно (−). Условие не говорит, куда и как именно вращается пластинка, поэтому возможны все четыре сочетания: каждое даёт $V_A = 5$ м/с и $V_B = 1$ м/с, а какое из них реализовано, по условию не определить.



$V_O = 4,\ w = 3$ $V_O = -3,\ w = -4$ $V_O = 3,\ w = 4$ $V_O = -4,\ w = -3$

Четыре возможные картины (проекции в м/с); в подписи — V_O и w (знак w: + против часовой, − по часовой; серая стрелка — направление вращения)

Обратите внимание. В условии не сказано, в какую сторону вращается пластинка и куда направлена $\vec{V}_O$ вдоль AC — поэтому ответ не одно число, а четыре. Знак проекции зависит ещё и от выбора направления оси AC (здесь — от A к C).

Проверка. Во всех четырёх случаях $V_O^2 + w^2 = 25$ и $|V_O - w| = 1$: $4^2 + 3^2 = 25$, $|4 - 3| = 1$; $(-3)^2 + (-4)^2 = 25$, $|-3 + 4| = 1$; $3^2 + 4^2 = 25$, $|3 - 4| = 1$; $(-4)^2 + (-3)^2 = 25$, $|-4 + 3| = 1$. Размерность — м/с. Поскольку и V_A, и V_B вошли только по модулю, а система симметрична относительно замены $(V_O, w) \to (-V_O, -w)$ (обращение движения: все скорости меняют знак), решения встречаются парами с противоположными знаками, как и получилось.

Смысл: у вершины A поступательная и вращательная скорости перпендикулярны и складываются по теореме Пифагора, у вершины B — направлены вдоль одной прямой и вычитаются. Поэтому V_O и w — катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой 5 м/с, отличающиеся на 1 м/с: это 3 и 4 м/с.

Ответ. Проекция $\vec{V}_O$ на направление AC равна $+4$ м/с, $+3$ м/с, -4 м/с или -3 м/с (четыре возможных случая; в каждом из них скорость вращения вершин равна 3 или 4 м/с).