Магнит на наклонной плите

Задача 2. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 2] Магнит массой m притягивается снизу к плоской металлической плите, образующей угол α с вертикалью, с постоянной силой $F = kmg$, где k — известный коэффициент ($k > 1$). Коэффициент трения между магнитом и плитой равен μ. Найдите модуль ускорения магнита.

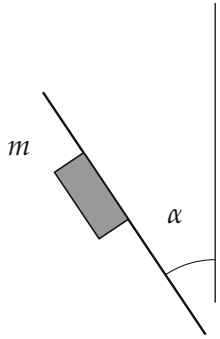


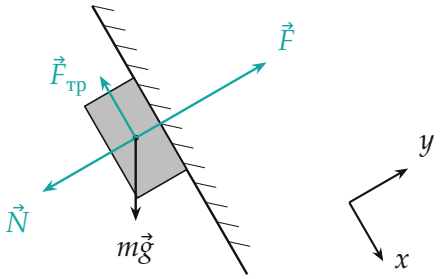
Рисунок условия: магнит m под плитой, плита наклонена на угол α к вертикали

▲ **Решение. Что происходит.** Магнит прижат к нижней стороне наклонной плиты силой притяжения, перпендикулярной плите. Вдоль плиты магнит тянет вниз составляющая силы тяжести, а удерживает трение. Класс задачи — движение по наклонной плоскости с трением, но с особенностью: перпендикулярная плите составляющая силы тяжести не прижимает магнит, а отрывает его от плиты, то есть вычитается из силы F. Главный вопрос: хватит ли трения покоя, чтобы магнит остался неподвижным. Если не хватит, магнит скользит вниз, и сила трения скольжения известна: μN.

Обозначения. N — сила нормальной реакции плиты, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, a — ускорение магнита вдоль плиты. Магнит в начале покоится (его «отпускают», начальной скорости нет).

1. Оси и силы. Ось x направим вдоль плиты вниз (в сторону возможного движения), ось y — перпендикулярно плите, в сторону плиты (туда, куда действует притяжение). Оси выбраны так, чтобы ускорение, если оно есть, лежало на одной оси, а силы $\vec{F}$ и $\vec{N}$ — на другой. На магнит

действуют четыре силы: тяжесть $m\vec{g}$ (вертикально вниз), притяжение $\vec{F}$ (вдоль $+y$), реакция плиты $\vec{N}$ (вдоль $-y$, плита выталкивает магнит) и трение $\vec{F}_{\text{тр}}$ (вдоль плиты, против возможного движения, то есть вдоль $-x$).

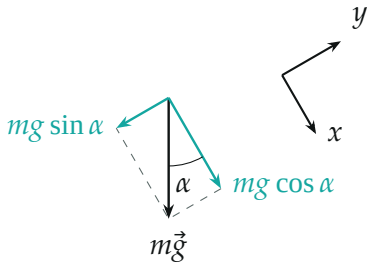


Силы на магнит: если он покоится, трение направлено вверх вдоль плиты; длины стрелок примерно по модулям при $k = 1{,}8$, $\alpha = 30°$

2. Проекции силы тяжести. Вертикаль образует с осью x угол α (плита наклонена на α к вертикали), а с осью y — угол $90° + \alpha$. Поэтому

$$(mg)_x = mg\cos\alpha, \qquad (mg)_y = -mg\sin\alpha.$$

Знак минус: составляющая $mg\sin\alpha$ направлена от плиты и вычитается из прижимающей силы F.



Разложение силы тяжести: вдоль плиты вниз $mg\cos\alpha$, от плиты $mg\sin\alpha$ (составляющая вдоль $-y$)

3. Нормальная реакция. Магнит не движется вдоль оси y: он остаётся на плите (притяжение $F = kmg > mg \geq mg\sin\alpha$ с запасом). Второй

закон Ньютона в проекции на ось y (ускорения вдоль y нет):

$$F - mg\sin\alpha - N = 0 \;\Rightarrow\; N = mg\,(k - \sin\alpha).$$

Так как $k > 1 \geq \sin\alpha$, величина $N > 0$: плита действительно давит на магнит.

4. Предельная сила трения покоя. Трение покоя не превосходит μN:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu mg\,(k - \sin\alpha).$$

5. Случай покоя. Если магнит неподвижен, второй закон Ньютона в проекции на ось x даёт ($a = 0$):

$$mg\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0 \;\Rightarrow\; F_{\text{тр}} = mg\cos\alpha.$$

Такая сила трения возможна, пока $mg\cos\alpha \leq \mu mg(k - \sin\alpha)$, то есть при

$$\mu \geq \mu_0 = \frac{\cos\alpha}{k - \sin\alpha}.$$

Тогда магнит неподвижен и $a = 0$.

6. Случай скольжения. При $\mu < \mu_0$ трения покоя не хватает, магнит соскальзывает вниз (вдоль $+x$), и сила трения скольжения равна $F_{\text{тр}} = \mu N$ (направлена вдоль $-x$). Второй закон Ньютона в проекции на x:

$$ma = mg\cos\alpha - \mu mg\,(k - \sin\alpha) \;\Rightarrow\; a = g\cos\alpha - \mu g\,(k - \sin\alpha).$$

При $\mu < \mu_0$ эта величина положительна, как и должно быть для скольжения вниз.

Обратите внимание. Сила трения покоя — не μN, а такая, какая нужна для равновесия, но не больше μN; поэтому сначала проверяют, хватает ли μN для покоя, и только потом подставляют μN как силу скольжения. Вторая ловушка: перпендикулярная составляющая силы тяжести здесь уменьшает давление на плиту ($N = mg(k - \sin\alpha)$, а не $mg(k + \sin\alpha)$).

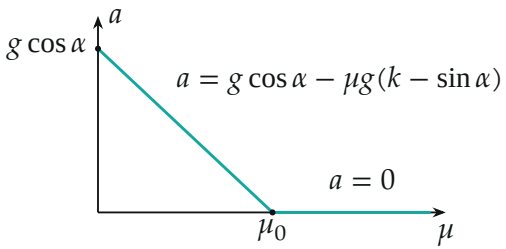


График $a(\mu)$ (при $k = 2$, $\alpha = 30°$, $\mu_0 \approx 0{,}58$): прямая до μ_0, дальше ноль

Проверка. Размерность: $g\cos\alpha$ и $\mu g(k - \sin\alpha)$ — м/с^2. Предел $\mu = 0$: $a = g\cos\alpha$, ускорение скольжения по гладкой плите, на которой вдоль плиты действует только $mg\cos\alpha$. На границе $\mu = \mu_0$ формула скольжения даёт $a = g\cos\alpha - g\cos\alpha = 0$, то есть значение непрерывно переходит в случай покоя. При $\alpha = 0$ (вертикальная плита) $a = g - \mu g k$ и покой при $\mu \geq 1/k$: сила kmg прижимает, трение μkmg держит вес mg — знакомый ответ.

Ответ. При $\mu \geq \dfrac{\cos\alpha}{k - \sin\alpha}$ магнит неподвижен, $a = 0$; при $\mu < \dfrac{\cos\alpha}{k - \sin\alpha}$ магнит скользит вниз с ускорением $a = g\cos\alpha - \mu g\,(k - \sin\alpha)$.