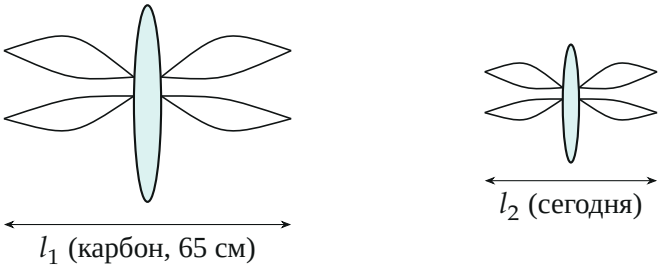
Размер стрекозы и кислород

Задача 3. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 3] Есть гипотеза, согласно которой размеры насекомых ограничены тем, что они потребляют воздух трахеальными трубками, выходящими на поверхность тела (то есть их воздухозабор пропорционален площади поверхности тела). Расход же кислорода, в свою очередь, пропорционален массе тела. Таким образом, можно прийти к выводу, что при увеличении насекомого в длину, высоту и ширину в одинаковое число раз, можно добиться того, что оно начнет «задыхаться» от недостатка кислорода.

Известно, что в карбоновом (каменноугольном) геологическом периоде размах крыльев стрекозы меганевры достигал 65 см. По предположениям учёных, это было возможно потому, что концентрация кислорода в атмосфере тогда составляла 35%, а не 21%, как сейчас (при той же плотности воздуха). Считая, что для времён карбона это был максимально возможный размер, оцените максимально возможный размах крыльев современной стрекозы. Сейчас стрекозы имеют примерно ту же плотность и пропорции тела, что и стрекоза периода карбона, и требуют на единицу массы не меньшее количество кислорода.

Примечание: ответ будет несколько превышать реальные размеры современных стрекоз из-за наличия других факторов, ограничивающих размер стрекозы (например, конкуренция с птицами).

Рисунка в условии нет; поясняющий рисунок — две подобные стрекозы.



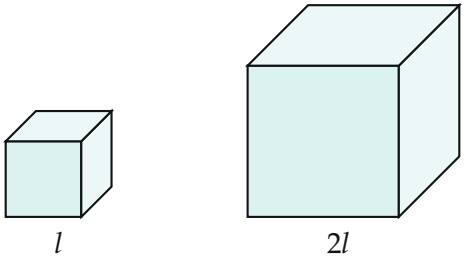
Подобные стрекозы: все размеры отличаются в одно и то же число раз l_1/l_2

▲ **Решение. Что происходит.** Организм дышит через поверхность, а расходует кислород всем объёмом. Размеры растут — площадь поверхности растёт как квадрат размера, а объём (и масса) — как куб. Поэтому у крупного насекомого на каждую единицу массы приходится меньше поверхности, через которую можно набрать кислород, и есть предельный размер. Класс задачи — оценка через подобие: все линейные размеры подобных тел меняются в одно число раз, площади — в квадрат, объёмы — в куб этого числа. Предельный размер нужно найти из равенства «приход равен расходу».

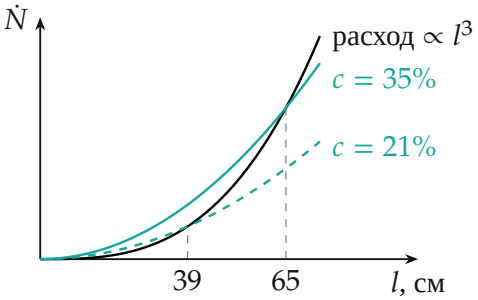
Обозначения. l — любой линейный размер насекомого (например, размах крыльев; у подобных стрекоз все размеры пропорциональны); c — концентрация кислорода в воздухе; S, V, m — площадь поверхности, объём и масса; индекс «1» — карбон, индекс «2» — сегодня.

1. Приход кислорода. За единицу времени поступает количество кислорода, пропорциональное площади поверхности (воздухозабор идёт через трахеи на поверхности) и концентрации кислорода (плотность воздуха та же, поэтому число молекул кислорода в единице объёма пропорционально его доле c): $\dot{N}_{\text{прих}} = \beta\, c\, S$. Площадь подобных тел $S = s\, l^2$ (s — число, одинаковое для подобных тел), поэтому $\dot{N}_{\text{прих}} = \beta s\, c\, l^2$.

2. Расход кислорода. Расход пропорционален массе: $\dot{N}_{\text{расх}} = \gamma\, m$, а $m = \rho V = \rho\, v\, l^3$ (плотность тела ρ у всех стрекоз одна, v — число, одинаковое при одинаковых пропорциях). Значит, $\dot{N}_{\text{расх}} = \gamma \rho v\, l^3$.



Размер вдвое больше: поверхность больше в $2^2 = 4$ раза, объём — в $2^3 = 8$ раз



Приход $\propto c\,l^2$ (бирюзовые линии) и расход $\propto l^3$ (чёрная линия) в зависимости от размера; парабола $c = 21\%$ пересекает кубическую кривую в $l_2 = 39$ см

3. Предельный размер. Насекомое живёт, пока приход не меньше расхода: $\beta s\, c\, l^2 \geq \gamma \rho v\, l^3$. Сокращаем на l^2:

$$l \leq l_{\max} = \frac{\beta s}{\gamma \rho v}\, c = \kappa\, c.$$

Предельный размер пропорционален концентрации кислорода: $l_{\max} = \kappa c$. Коэффициент κ зависит от пропорций тела, плотности и расхода γ на единицу массы; пропорции и плотность у стрекоз те же, а γ у современной не меньше, поэтому $\kappa_2 \leq \kappa_1$ и для оценки сверху берём $\kappa_2 = \kappa_1 = \kappa$.

4. Подстановка. Для карбона $l_1 = \kappa c_1$, для современной стрекозы $l_2 \leq \kappa c_2$; делим:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{c_2}{c_1} \;\Rightarrow\; l_2 = l_1 \frac{c_2}{c_1} = 65\text{ см} \cdot \frac{21}{35} = 39\text{ см}.$$

Обратите внимание. Размер можно брать любой (размах крыльев, длину тела): отношение l_2/l_1 у подобных стрекоз одно и то же. Концентрацию нужно брать как долю по числу молекул (объёмную долю) при той же плотности воздуха; в процентах отношение $21/35$ не требует перевода.

Проверка. Размерность: $[l]$ — см, отношение концентраций безразмерно. Предельный случай: при $c_2 = c_1$ получаем $l_2 = l_1$. Масса предельной современной стрекозы меньше карбоновой в $(35/21)^3 \approx 4{,}6$ раза, хотя размах меньше всего в 1,7 раза. Отношение прихода к расхо-

ду пропорционально c/l: для карбона $35/65 = 0{,}538$, для современной стрекозы $21/39 = 0{,}538$ — запас по кислороду у обеих на пределе одинаков, как и должно быть.

Ответ. $l_2 = l_1 \dfrac{21}{35} \approx 39$ см: максимально возможный размах крыльев современной стрекозы около 39 см.