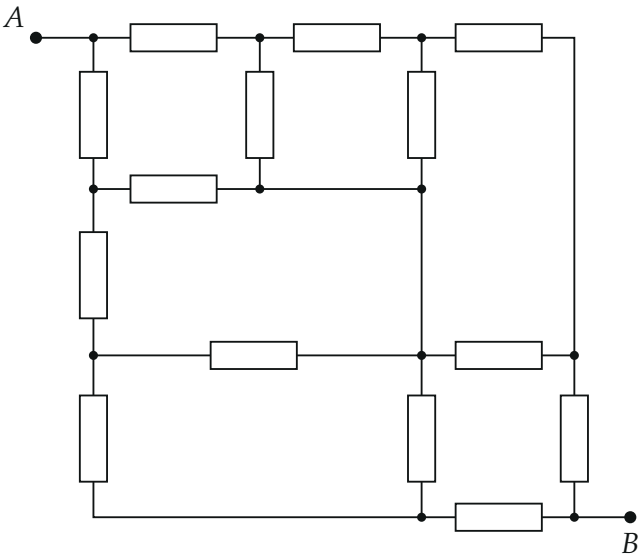
Участок цепи из резисторов

Задача 5. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 5] Участок AB электрической цепи состоит из одинаковых резисторов с одинаковыми сопротивлениями R. Найдите общее сопротивление участка AB.



▲ **Решение. Что происходит.** Схема выглядит запутанной, но в ней много провода без резисторов: соседние узлы, соединённые проводом, — это один узел. Если два узла имеют одинаковый потенциал, ток между ними не течёт, и резистор между такими узлами можно убрать (или считать, что он закорочен). Главная идея: найти группы узлов с равным потенциалом, объединить их в один узел и посчитать получившуюся цепочку параллельных групп. Класс задачи — сопротивление смешанного соединения с равными потенциалами.

Обозначения. U — напряжение между A и B (потенциал B принимаем за нуль, потенциал A равен U); I — полный ток через участок; $R_{\text{общ}} = U/I$ — искомое сопротивление.

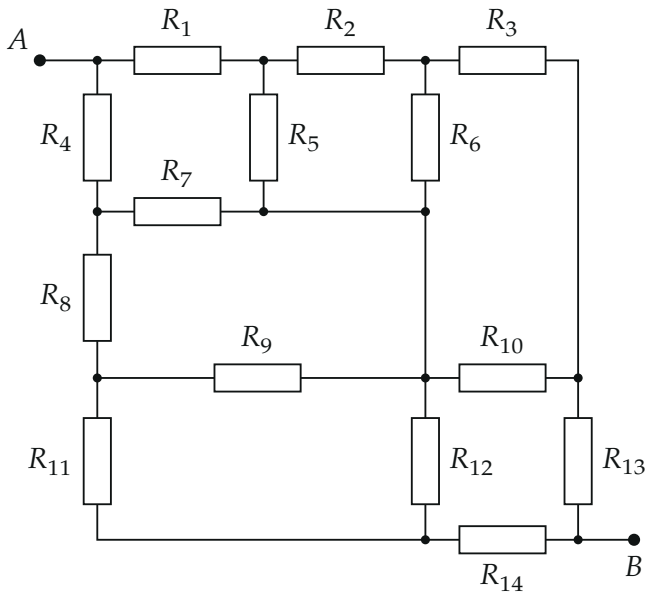


Схема участка AB с занумерованными резисторами

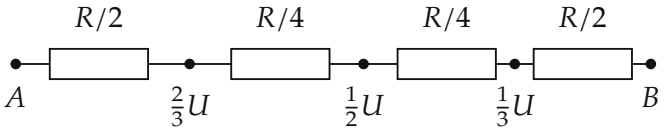
1. Узлы. Провода объединяют точки в узлы: $\{A\}$; $\{a_2\}$ (место, где сходятся R_1, R_2, R_5); $\{a_3\}$ (R_2, R_3, R_6); $\{L_1\}$ (R_4, R_7, R_8); $\{L_2\}$ (R_8, R_9, R_{11}); узел P — шина, к которой подходят нижние концы R_5 и R_6, правые концы R_7 и R_9, левый конец R_{10} и верхний конец R_{12}; Q — правая шина (R_3, R_{10}, R_{13}); D — нижняя шина (R_{11}, R_{12}, R_{14}); $\{B\}$ (R_{13}, R_{14}).

2. Группы с равным потенциалом. Схема устроена как цепочка из групп: от A идут два одинаковых резистора R_1 и R_4 к узлам a_2 и L_1; от этих двух узлов к узлам a_3, L_2, P идут четыре резистора R_2, R_5, R_7, R_8, и т. д. Принимаем: узлы a_2 и L_1 — одной группы (потенциал φ_1), узлы a_3, L_2, P — второй (потенциал φ_2), узлы Q и D — третьей (φ_3). Резисторы внутри группы (R_6 соединяет a_3 и P, R_9 соединяет L_2 и P) — между точками одного потенциала, тока в них нет. Это предположение проверим в конце (пункт 5).

3. Эквивалентная цепочка. Объединив узлы групп, получаем последовательность из пяти узлов A, группа 1, группа 2, группа 3, B, между соседними — параллельные резисторы:

- $A \to$ группа 1: R_1 и R_4 параллельно, $R_1 \parallel R_4 = R/2$;

- группа 1 → группа 2: R_2, R_5, R_7, R_8 — четыре параллельно, $R/4$;
- группа 2 → группа 3: R_3, R_{10}, R_{11}, R_{12} — четыре параллельно, $R/4$;
- группа 3 → B: R_{13} и R_{14} параллельно, $R/2$.



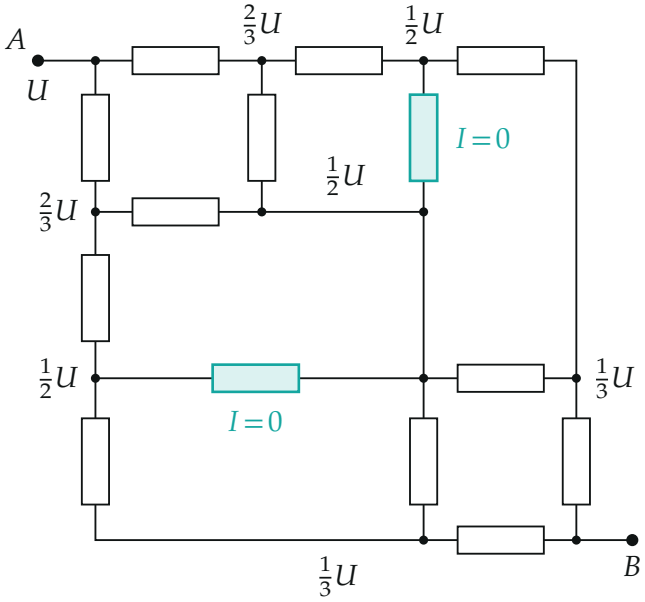
Эквивалентная цепочка; под узлами — их потенциалы (найдены в пункте 4)

4. Общее сопротивление. Четыре группы соединены последовательно:

$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}.$$

Напряжения делятся пропорционально сопротивлениям (2 : 1 : 1 : 2, всего 6 частей), поэтому потенциалы узлов: U, $U - \frac{2}{6}U = \frac{2}{3}U$, $\frac{2}{3}U - \frac{1}{6}U = \frac{1}{2}U$, $\frac{1}{2}U - \frac{1}{6}U = \frac{1}{3}U$, 0.

5. Проверка предположения. У R_6 потенциалы концов a_3 и P равны $\frac{1}{2}U$ — ток нулевой; у R_9 концы L_2 и P — тоже $\frac{1}{2}U$. Значит, потенциалы узлов, полученные из цепочки, не противоречат предположению: ток через каждый резистор определён по закону Ома $I_k = \Delta\varphi/R$, и в каждом узле входящий ток равен выходящему. Например, в узел P входит по $U/(6R)$ через R_5 и R_7 (всего $U/(3R)$), а выходит по $U/(6R)$ через R_{10} и R_{12} (тоже всего $U/(3R)$). Решение уравнений Кирхгофа единственно, так что найденная картина и есть настоящая.



Потенциалы узлов; в резисторах R_6 и R_9 (бирюзовые) тока нет, их концы имеют одинаковый потенциал

Обратите внимание. Резисторы R_6 и R_9 нельзя «просто выбросить, потому что на схеме так удобнее» — сначала нужно убедиться, что потенциалы их концов равны; здесь это следует из проверки в пункте 5.

Проверка. Полный ток из A течёт через R_1 и R_4, на каждом из них напряжение $U-\frac{2}{3}U=\frac{1}{3}U$:

$$I=\frac{U/3}{R}+\frac{U/3}{R}=\frac{2U}{3R}\ \Rightarrow\ R_{\text{общ}}=\frac{U}{I}=\frac{3R}{2},$$

что совпадает с суммой по цепочке. Размерность — Ом.

Ответ. $R_{AB}=\dfrac{3R}{2}$.