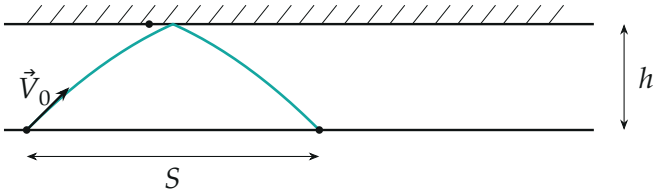
Мяч в зале под потолком

Задача 6. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 6] В спортивном зале высотой h бросают маленький мяч с начальной скоростью V_0. Определите, какое максимальное расстояние по горизонтали может пролететь мяч после бросания до первого удара о пол, если соударение с потолком абсолютно упругое. Считайте, что мяч бросают с уровня пола. Пол и потолок горизонтальны, сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Рисунка в условии нет; поясняющий рисунок — траектория мяча с ударом о потолок.



Бросок под углом, удар о потолок, падение на пол; S — расстояние между точкой броска и точкой первого удара о пол

▲ **Решение. Что происходит.** Мяч летит по параболе. Если потолок высок, он на него не повлияет, и наибольшая дальность достигается при угле 45°. Если потолок низок, мяч ударяется о него (абсолютно упруго: вертикальная составляющая скорости меняет знак, горизонтальная не меняется) и летит дальше уже вниз. Тогда дальность меньше, чем «свободная», и нужно искать угол, при котором она наибольшая. Класс задачи — баллистика с отражением, поиск максимума.

Обозначения. θ — угол броска; $v_x = V_0\cos\theta$, $v_y = V_0\sin\theta$ — начальные проекции скорости (ось x горизонтальна, ось y вертикальна вверх, начало — точка броска); S — дальность до первого удара о пол.

1. Дальность без потолка. Координаты $x = v_x t$, $y = v_y t - gt^2/2$ (движение с постоянным ускорением $-g$ по вертикали, равномерное по горизонтали). Мяч возвращается на пол при $t = T = 2v_y/g$, дальность

$$S_0 = v_x T = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g} \le \frac{V_0^2}{g},$$

максимум достигается при $\theta = 45°$. Наибольшая высота подъёма $H = v_y^2/(2g)$; при 45° она равна $H_{45} = V_0^2/(4g)$.

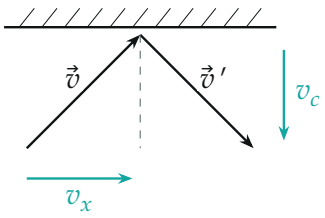
2. Потолок высокий: $V_0 \le 2\sqrt{gh}$**.** Тогда $H_{45} = V_0^2/(4g) \le h$, мяч с оптимальным углом до потолка не долетает. Больше V_0^2/g не получить и при других углах: удар о потолок только сокращает время полёта (пункт 3б: $T = 2(v_y - v_c)/g < 2v_y/g$). Поэтому

$$S = \frac{V_0^2}{g}.$$

3. Потолок низкий: $V_0 > 2\sqrt{gh}$**.** Теперь $H_{45} > h$: траектория под 45° ударяется о потолок. Мяч достигает потолка, только если $v_y > \sqrt{2gh}$ (иначе высота подъёма $v_y^2/(2g) \le h$). Рассмотрим два интервала v_y.

3а. Мяч не долетает до потолка или касается его: $v_y \le \sqrt{2gh}$**.** Здесь $S = V_0^2 \sin 2\theta/g$, и из-за $V_0 > 2\sqrt{gh}$ угол, соответствующий $v_y = \sqrt{2gh}$, меньше 45° ($\sin\theta = \sqrt{2gh}/V_0 < 1/\sqrt{2}$). Пока $\theta < 45°$, $\sin 2\theta$ растёт вместе с θ, значит S растёт с ростом v_y и наибольшее значение достигается на границе — при $v_y = \sqrt{2gh}$, когда мяч только касается потолка.

3б. Мяч ударяется о потолок: $v_y > \sqrt{2gh}$**.** У потолка вертикальная скорость мяча $v_c = \sqrt{v_y^2 - 2gh}$ (из $v_c^2 = v_y^2 - 2gh$), направлена вверх; после упругого удара она меняется на противоположную, горизонтальная v_x сохраняется.



Упругий удар о потолок: горизонтальная составляющая скорости сохраняется, вертикальная (v_c) меняет знак

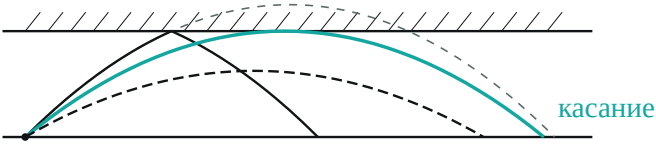
Время подъёма до потолка $t_1 = (v_y - v_c)/g$. После удара мяч падает с высоты h с начальной скоростью v_c вниз: $h = v_c t_2 + g t_2^2/2$, откуда

$$t_2 = \frac{-v_c + \sqrt{v_c^2 + 2gh}}{g} = \frac{v_y - v_c}{g} = t_1,$$

поскольку $v_c^2 + 2gh = v_y^2$. Общее время полёта $T = t_1 + t_2 = \dfrac{2(v_y - v_c)}{g}$, и после преобразования $v_y - v_c = \dfrac{2gh}{v_y + v_c}$:

$$S = v_x T = \frac{4h\sqrt{V_0^2 - v_y^2}}{v_y + \sqrt{v_y^2 - 2gh}}.$$

При росте v_y числитель убывает, знаменатель растёт, значит, S убывает: удар о потолок «съедает» дальность тем сильнее, чем круче бросок. Наибольшая дальность достигается при наименьшем v_y в этом интервале, то есть на границе $v_y = \sqrt{2gh}$, когда траектория касается потолка.



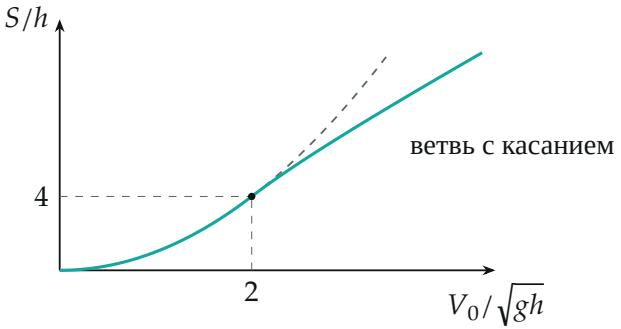
Траектории при $V_0 = 10$ м/с, $h = 2$ м: серая штриховая — бросок под 45° без потолка (дальность 10 м); чёрная сплошная — тот же бросок с потолком (5,5 м); бирюзовая — касание потолка (9,8 м); чёрная штриховая — бросок ниже, мяч до потолка не долетает (8,7 м)

4. Дальность при касании. При $v_y = \sqrt{2gh}$ имеем $v_c = 0$, $v_x = \sqrt{V_0^2 - 2gh}$, время полёта $T = 2v_y/g = 2\sqrt{2gh}/g$ (мяч поднимается до

потолка за $\sqrt{2gh}/g$ и падает за такое же время), и

$$S = v_x T = \frac{2\sqrt{2gh}\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g} = 4h\sqrt{\frac{V_0^2}{2gh} - 1}.$$

(Проверка равенства: $\frac{2\sqrt{2gh}\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g} = \frac{4h\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{\sqrt{2gh}}$, так как $2\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{2gh} = 4gh$.)



Зависимость S/h от $V_0/\sqrt{gh}$: до 2 — парабола V_0^2/g, дальше — ветвь с касанием потолка (серая штриховая — что было бы без потолка)

Обратите внимание. Нельзя просто взять угол 45° и сказать: «дальность V_0^2/g» — при низком потолке удар о него резко сокращает дальность. Другая ловушка: чтобы оптимум был на границе, нужно было доказать убывание S в интервале 3б — без этого максимум могла бы давать и траектория с ударом.

Проверка. Размерность: V_0^2/g — метры; $4h\sqrt{\ldots}$ — метры, под корнем безразмерная величина. При $V_0 = 2\sqrt{gh}$ обе формулы дают $S = 4h$: $V_0^2/g = 4h$ и $4h\sqrt{2-1} = 4h$ — ответ непрерывен. При $V_0 = 10$ м/с, $h = 2$ м вторая формула даёт $8\sqrt{2{,}5 - 1} = 9{,}8$ м, меньше $V_0^2/g = 10$ м, как и должно быть при h, меньшем нужного для 45° ($2 < 2{,}5$).

Ответ. $S_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$ при $V_0 \le 2\sqrt{gh}$; $S_{\max} = 4h\sqrt{\frac{V_0^2}{2gh} - 1}$ при $V_0 > 2\sqrt{gh}$.