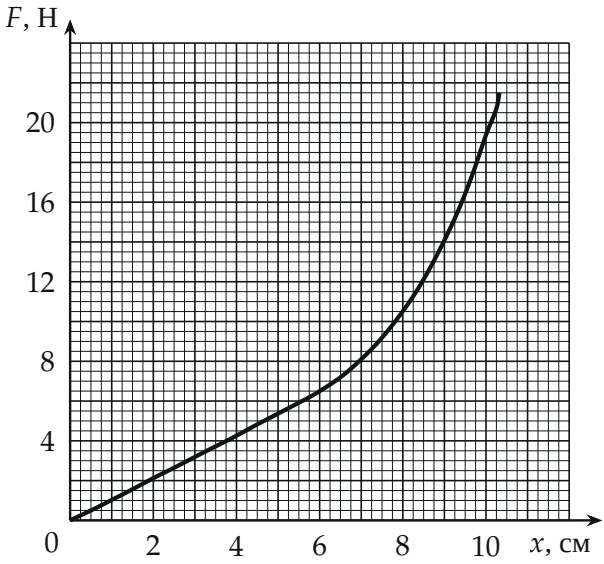
Груз на пружине с нелинейным графиком

Задача 7. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 7] На рисунке показан график зависимости модуля силы F растяжения пружины от её удлинения x (при больших деформациях пружина не подчиняется закону Гука). Пружину прикрепляют одним концом к потолку. К другому концу пружины, не деформируя её, аккуратно подвешивают груз массой $m = 650$ г, после чего отпускают груз без начальной скорости. Оцените, на какую максимальную длину растянется пружина? Трением и массой пружины пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Груз отпускают в момент, когда пружина не растянута, и он едет вниз. Сначала сила тяжести больше силы упругости, груз разгоняется; в положении равновесия скорость максимальна; дальше пружина тянет вверх сильнее, груз тормозится и в нижней точке останавливается. Трения нет, так что механическая энергия сохраняется. Класс задачи — закон сохранения энергии с нелинейной пружиной: энергия пружины — не $kx^2/2$, а работа силы упругости, то есть площадь под графиком.

Обозначения. x — удлинение пружины; x_0 — наибольшее удлинение (в нижней точке); $F(x)$ — сила упругости по графику; $m = 0{,}65$ кг, $mg = 6{,}5$ Н.

1. Закон сохранения энергии. В начале и в нижней точке скорость груза равна нулю, поэтому кинетическая энергия не изменилась. Груз опустился на x_0 (потолок и верхний конец пружины неподвижны, нижний конец смещается на удлинение), его потенциальная энергия убыла на mgx_0. Эта убыль целиком перешла в энергию пружины $W_{\text{упр}}$:

$$mgx_0 = W_{\text{упр}}(x_0).$$

2. Энергия пружины. Энергия деформированной пружины равна работе внешней силы, растягивающей её, то есть работе, которую надо совершить против силы упругости $F(x)$. При медленном растяжении сила $F(x)$ меняется от 0 до $F(x_0)$, и работа на малом смещении dx равна $F\,dx$; сумма даёт площадь под графиком $F(x)$ от 0 до x_0:

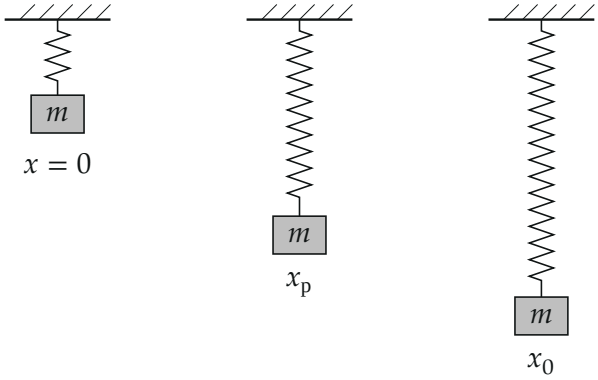
$$W_{\text{упр}}(x_0) = \int_0^{x_0} F\,dx = S_{\text{под графиком}}.$$

Если бы пружина была линейной, площадь была бы треугольником $kx_0^2/2$; здесь график изогнут, поэтому площадь считаем по клеткам (или по таблице точек).

3. Уравнение. Подставляем в пункт 1:

$$mg\,x_0 = \int_0^{x_0} F(x)\,dx.$$

Слева — площадь прямоугольника высотой $mg = 6{,}5$ Н и шириной x_0. Значит, нужен такой x_0, при котором площадь под кривой $F(x)$ равна площади этого прямоугольника. Эквивалентно: площадь S_1 между линией $F = mg$ и кривой, там где кривая ниже линии ($0 < x < x_{\text{p}}$), равна площади S_2 там, где кривая выше ($x_{\text{p}} < x < x_0$), — ведь $\int_0^{x_0}(F - mg)\,dx = 0$.



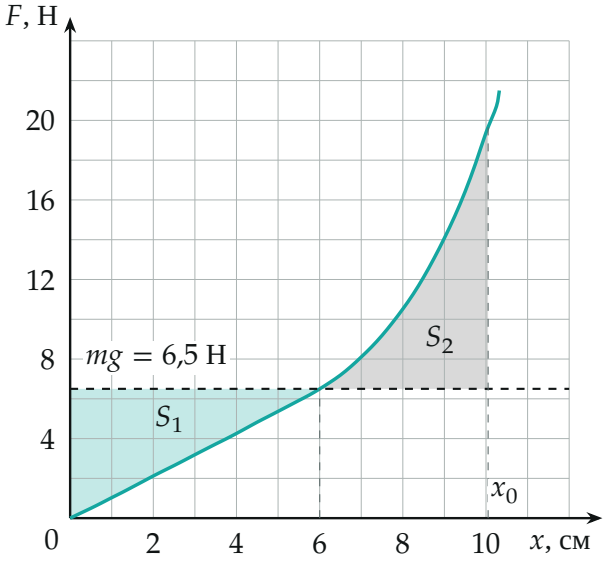
Три положения груза: пружина не растянута, положение равновесия x_p ($F = mg$) и нижняя точка x_0

4. Положение равновесия. Равновесие, где $F(x_\text{р}) = mg = 6{,}5$ Н: по графику $x_\text{р} \approx 6{,}0$ см. До этой точки сила тяжести больше силы упругости (груз ускоряется), после — меньше (тормозится).

5. Подбор x_0 по графику. Площадь под графиком вычисляем по точкам, снятым с графика (метод трапеций, шаг 1 см; значения силы в Н: 0, 1,0, 2,1, 3,2, 4,3, 5,4, 6,5, 8,1, 10,5, 14,1, 19,4 при $x = 0, 1, \ldots, 10$ см). Накопленная площадь $A(x) = \int_0^x F\,dx$ и работа тяжести mgx (в Н·см):

x, см	6	8	9	10
$A(x)$	19,2	35,8	48,1	64,8
mgx	39,0	52,0	58,5	65,0

При $x < 10$ см $A(x) < mgx$: груз ещё движется вниз со скоростью. Равенство достигается при $x_0 \approx 10$ см (более мелкий шаг по графику даёт 10,0–10,1 см).



Правило равных площадей: S_1 (кривая ниже линии mg) и S_2 (кривая выше линии) одинаковы, $S_1 \approx S_2 \approx 20$ Н·см; условие выполнено при $x_0 = 10$ см

6. Ответ в единицах СИ. Работа тяжести $mgx_0 = 6{,}5 \cdot 0{,}10 = 0{,}65$ Дж; площадь под графиком до 10 см равна 65 Н·см $= 0{,}65$ Дж — совпадает.

Обратите внимание. Энергия пружины — не $kx^2/2$ с «k из начального участка»: график изгибается, жёсткость растёт. Если ошибочно взять линейную пружину с $F = mg$ при $x_\text{р} = 6$ см, получится $x_0 = 2x_\text{р} = 12$ см, а настоящий ответ меньше: пружина становится жёстче и останавливает груз раньше.

Проверка. Размерность: Н·см $= 10^{-2}$ Дж, в обеих частях равенства одинаковая. Правдоподобие: $x_0 = 10$ см лежит между положением равновесия (6 см) и 12 см — значением для линейной пружины. Оценка по клеткам (9,75–10,25 см допустимо) устойчива: сдвиг x_0 на 0,25 см меняет $A(x) - mgx$ примерно на ± 3 Н·см (так как $F - mg \approx 13$ Н в этой точке).

Ответ. Пружина растянется на $x_0 \approx 10$ см.