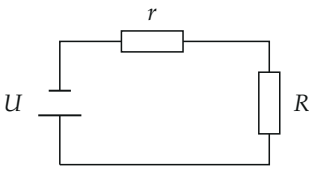
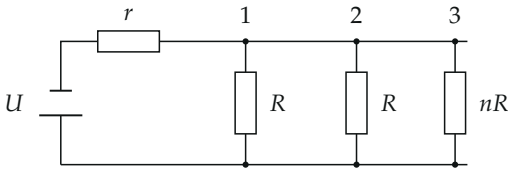
Три кипятильника на аккумуляторе

Задача 8. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 8] В комнате с температурой воздуха $t_к = 25$ °C находится батарея аккумуляторов с суммарной ЭДС $U = 200$ В и суммарным внутренним сопротивлением $r = 20$ Ом. Выводы батареи подсоединены к электрической розетке. Изначально в эту розетку был включен кипятильник номер 1 с сопротивлением $R = 200$ Ом, опущенный в стакан с холодной водой, которую он смог прогреть только до температуры $t_1 = 50$ °C. Потом кипятильник вынули из розетки и вставили в неё разветвитель питания (так называемый «тройник»). К первым двум его выходам подключили кипятильники номер 1 и номер 2 (такой же, как кипятильник 1), а к третьему — кипятильник номер 3, той же формы, изготовленный из тех же материалов, но все размеры которого в $n = 2$ раза меньше, чем у кипятильника номер 1. Эти кипятильники положили в стаканы с холодной водой: кипятильники 1 и 3 — в такие же, что и изначально, а кипятильник 2 — в стакан, все размеры которого в n раз меньше, чем у исходного стакана. До каких температур t_2 и t_3, соответственно, нагреется за длительное время вода в стаканах, в которые помещены кипятильники 2 и 3? Мощность тепловых потерь через единицу площади поверхности считайте пропорциональной разности температур.

Рисунка в условии нет; поясняющие рисунки — схемы двух опытов и стаканы.



опыт 1: один кипятильник



опыт 2: тройник

Схемы опытов: в опыте 2 к батарее параллельно подключены три кипятильника (сопротивления R, R и nR)

▲ **Решение. Что происходит.** Кипятильник превращает электрическую энергию в тепло, а стакан с водой теряет тепло в комнату. Через длительное время устанавливается равновесие: мощность кипятильника

равна мощности тепловых потерь. Потери пропорциональны площади поверхности стакана и разности температур воды и воздуха, поэтому по первому опыту можно найти «сколько ватт теряет стакан на градус», а во втором — понять, как изменились мощность кипятильника и размеры стакана. Особенность задачи: при подключении тройника напряжение на кипятильниках падает (внутреннее сопротивление батареи), и кипятильники влияют друг на друга только через батарею. Класс задачи — тепловой баланс стационарного режима и цепь с источником, у которого есть внутреннее сопротивление.

Обозначения. $P_1 = U^2R/(R+r)^2$ — мощность кипятильника в опыте 1; h — мощность потерь с единицы площади на 1 К; S — площадь поверхности исходного стакана; V — напряжение на розетке в опыте 2; $\Delta t_1 = t_1 - t_к = 25$ К.

1. Опыт 1: мощность кипятильника и потерь. Закон Ома для полной цепи: $I = U/(R+r)$. Закон Джоуля — Ленца: мощность на кипятильнике

$$P_1 = I^2R = \frac{U^2R}{(R+r)^2} = \frac{200^2 \cdot 200}{220^2} \approx 165 \text{ Вт}.$$

В установившемся режиме эта мощность равна мощности потерь через поверхность стакана:

$$P_1 = hS\,\Delta t_1 \;\Rightarrow\; hS = \frac{P_1}{\Delta t_1} \approx 6{,}6 \text{ Вт/К}.$$

2. Сопротивление малого кипятильника. Проволока — проводник с сопротивлением $R = \rho\ell/A$ (ρ — удельное сопротивление, ℓ — длина, A — площадь сечения). Если все размеры уменьшить в n раз, длина уменьшится в n, а площадь сечения — в n^2 раз, так что сопротивление вырастет в n раз: $R_3 = nR = 400$ Ом.

3. Опыт 2: напряжение на розетке. Три кипятильника подключены параллельно, общее сопротивление находим по правилу параллельных

проводников:

$$\frac{1}{R_\text{п}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{nR} = \frac{2n+1}{nR} \;\Rightarrow\; R_\text{п} = \frac{nR}{2n+1} = 80\ \text{Ом}.$$

Ток батареи $I = U/(R_\text{п} + r) = 200/100 = 2$ А; напряжение на розетке (и на каждом кипятильнике)

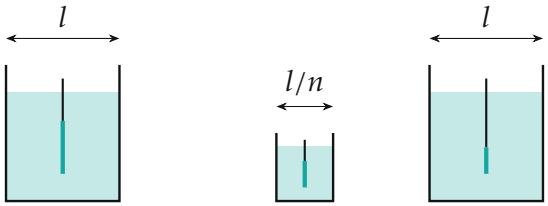
$$V = IR_\text{п} = \frac{UnR}{nR + (2n+1)r} = 160\ \text{В}.$$

Оно меньше U, и меньше, чем было в опыте 1 ($I_1 R = 200 \cdot 200/220 \approx 182$ В): подключение трёх кипятильников нагружает батарею сильнее.

4. Мощности кипятильников в опыте 2. Кипятильники 1 и 2:

$$P_{1,2} = \frac{V^2}{R} = \frac{160^2}{200} = 128\ \text{Вт},$$

$$P_3 = \frac{V^2}{nR} = \frac{160^2}{400} = 64\ \text{Вт}.$$



Стаканы и кипятильники: у стакана 2 все размеры (и поверхность, S/n^2) меньше; кипятильник 3 меньше исходного в n раз

5. Кипятильник 3 (стакан такой же, площадь S). Потери тоже $hS\Delta t_3$, где $\Delta t_3 = t_3 - t_\text{к}$, и они равны P_3:

$$P_3 = hS\,\Delta t_3 \;\Rightarrow\; \Delta t_3 = \frac{P_3}{hS} = \Delta t_1 \frac{P_3}{P_1}.$$

Подставляя $P_3 = V^2/(nR)$ и $P_1 = U^2R/(R+r)^2$, $V = UnR/(nR+(2n+1)r)$:

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{V^2}{nR}\cdot\frac{(R+r)^2}{U^2R} = \frac{n(R+r)^2}{\big((2n+1)r+nR\big)^2},$$

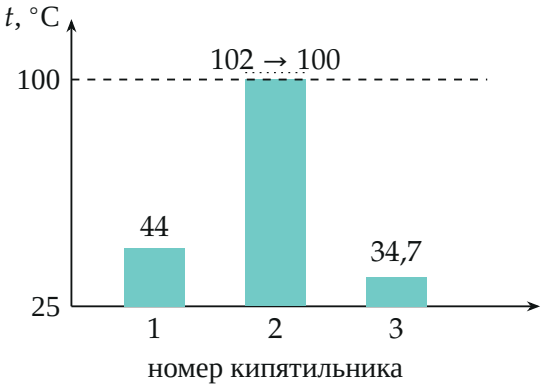
$$t_3 = t_к + (t_1 - t_к)\,\frac{n(R+r)^2}{\big((2n+1)r+nR\big)^2},$$

$$t_3 = 25 + 25\cdot\frac{2\cdot 220^2}{500^2} \approx 25 + 25\cdot 0{,}387 \approx 34{,}7\ ^\circ\text{C}.$$

6. Кипятильник 2 (стакан в n раз меньше). Площадь поверхности стакана уменьшилась в n^2 раз: потери при той же разности температур — $hS\Delta t/n^2$ (мощность потерь с единицы поверхности пропорциональна разности температур). Равенство мощностей $P_2 = hS\Delta t_2/n^2$ даёт

$$\Delta t_2 = n^2\,\frac{P_2}{hS} = n^2\,\Delta t_1\,\frac{P_2}{P_1} = 4\cdot 25\cdot\frac{128}{165} \approx 77\ \text{K},$$

то есть расчётная температура $t_2 \approx 25 + 77 = 102\ ^\circ$C — выше температуры кипения воды 100 °C. Значит, вода закипит: пока в стакане есть вода, её температура не может превысить 100 °C (избыток мощности уходит на испарение), и $t_2 = 100\ ^\circ$C.



Установившиеся температуры воды в опыте 2: расчёт для кипятильника 2 даёт 102 °C, но вода не нагреется выше 100 °C — она закипает

Обратите внимание. Размеры стакана и кипятильника меняются в n раз независимо: у кипятильника это меняет сопротивление ($R \to nR$), у стакана — площадь потерь ($S \to S/n^2$). Температуру выше 100 °C у воды при атмосферном давлении не получить: расчётное значение для кипятильника 2 — «условное», физический ответ — кипение.

Проверка. Размерность: Вт/(Вт/К)=К. Предел $n = 1$ (три одинаковых кипятильника): t_3 даёт $t_к + \Delta t_1 \cdot \dfrac{(R+r)^2}{(3r+R)^2} = 25 + 25 \cdot \dfrac{220^2}{260^2} \approx 42{,}9$ °C, меньше 50 °C из-за просадки напряжения — верно. Для кипятильника 1 в опыте 2 (тот же стакан) получилось бы $25 + 25 \cdot 128/165 \approx 44{,}4$ °C, тоже меньше 50 °C.

Ответ. $t_2 = 100$ °C (вода закипит: расчёт даёт ≈ 102 °C, больше точки кипения); $t_3 = t_к + (t_1 - t_к)\, n\left(\dfrac{r+R}{(2n+1)r+nR}\right)^2 \approx 34{,}7$ °C.