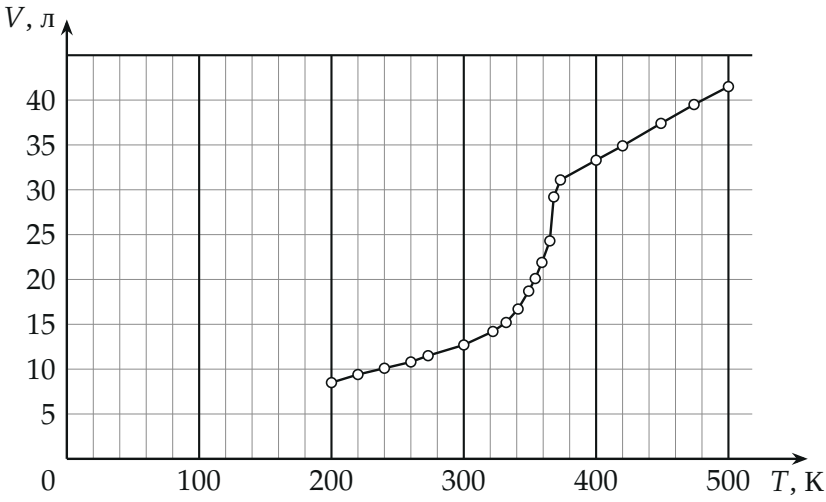
Лёд в цилиндре у Знайки

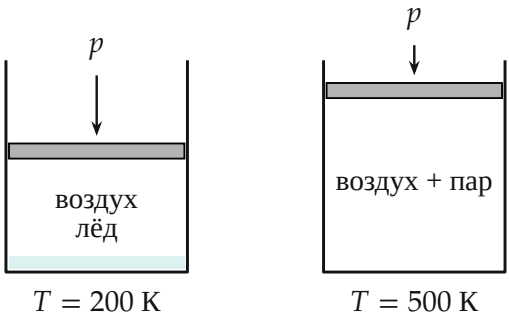
Задача 9. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 9] Знайка решил провести исследования Гей-Люссака для идеального газа, только более аккуратно. Для этих целей он взял цилиндрический сосуд большого объёма с поршнем, который мог двигаться практически без трения, вынул поршень, и охладил их до температуры 200 K. Затем он вставил поршень обратно в сосуд так, что внутри оказался охлаждённый до той же температуры воздух, обеспечил постоянное давление, и провёл измерения зависимости объёма V газа в сосуде от температуры T. По полученным результатам Знайка построил график (см. рисунок). Найденная зависимость мало напоминала результаты, полученные Гей-Люссаком. Знайка понял свою ошибку. Он вставил поршень в цилиндр при температуре 200 K и, очевидно, на дне сосуда при этом оказалось некоторое количество льда, который образовался из воды, сконденсировавшейся при охлаждении воздуха. Оцените массу льда, который оказался в цилиндре у Знайки, если давление в течение опыта было равно $2 \cdot 10^5$ Па. Молярная масса воды 18 г/моль.



▲ **Решение. Что происходит.** В цилиндре под поршнем при постоянном давлении лежит лёд и воздух. При нагревании лёд тает, вода испаряется, пар добавляется к воздуху, и число молекул газа растёт — поэтому

объём растёт быстрее, чем по закону Гей-Люссака для неизменного количества газа. При высокой температуре вся вода окажется паром, и тогда газ снова ведёт себя как идеальный, но в нём вдвое больше вещества. По графику найдём количество газа в начале и в конце, а разность даст количество воды, то есть льда. Класс задачи — уравнение состояния идеального газа и испарение (по графику).

Обозначения. $n(T) = pV/(RT)$ — полное количество вещества газа под поршнем; n_0 — количество воздуха; ν — количество воды (льда); $m_л = \mu\nu$ — искомая масса льда; $p = 2 \cdot 10^5$ Па, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), $\mu = 18$ г/моль.



Начало опыта: воздух и лёд при $T = 200$ K. В конце: воздух и пар при $T = 500$ K

1. Газ при низкой температуре. При $T = 200$ K давление насыщенного пара над льдом ничтожно (порядка 10^{-1} Па при $p = 2 \cdot 10^5$ Па), поэтому в газовой фазе только воздух. Уравнение Менделеева — Клапейрона для газа (давление p, объём V_1 из графика, температура T_1):

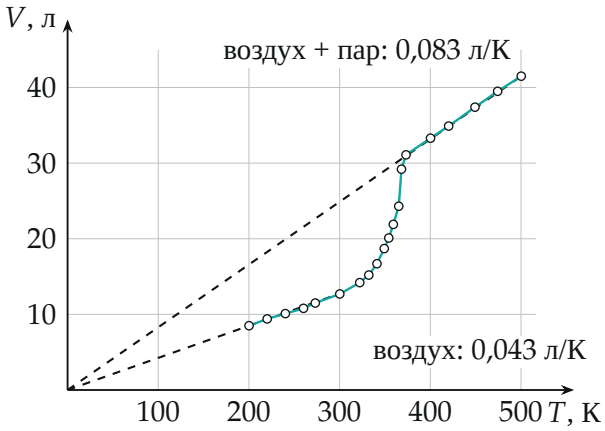
$$n_0 = \frac{pV_1}{RT_1} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 200} \approx 1{,}02 \text{ моль}.$$

На графике это начало: $V = 8{,}5$ л при $T = 200$ K. (Проверка по графику: в области 200–270 K V растёт пропорционально T, $V/T \approx 0{,}043$ л/K, то есть количество газа не меняется.)

2. Газ при высокой температуре. Выше 373 K точки графика ложатся на прямую, продолжение которой проходит через начало координат

(33,3/400 ≈ 41,5/500 ≈ 0,083 л/К): значит, вещества в газе снова постоянное количество, а вся вода — пар. Берём точку $T_2 = 500$ К, $V_2 = 41{,}5$ л:

$$n_{\text{полн}} = \frac{pV_2}{RT_2} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 41{,}5 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 500} \approx 2{,}00 \text{ моль}.$$



Два прямолинейных участка графика: V/T в конце в два раза больше, чем в начале — в газе вдвое больше вещества

3. Количество воды. Весь газ в конце — воздух и пар, поэтому воды было

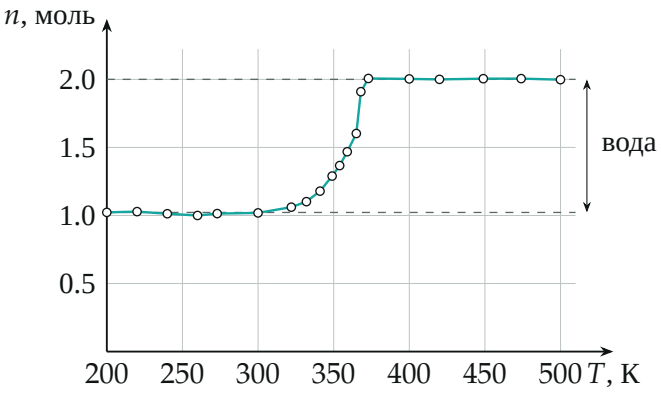
$$\nu = n_{\text{полн}} - n_0 \approx 2{,}00 - 1{,}02 \approx 0{,}98 \text{ моль} \approx 1 \text{ моль}.$$

Воздух из сосуда не уходил, вода не уходила, поэтому количество воды в конце опыта (пар) равно количеству льда в начале.

4. Масса льда.

$$m_{\text{л}} = \mu\nu \approx 18 \text{ г/моль} \cdot 0{,}98 \text{ моль} \approx 18 \text{ г}.$$

Оценка точная лишь до погрешности снятия данных с графика (около 2–3%); разумное округление — 1 моль и 18 г.



Количество газа $n = pV/(RT)$ по точкам графика: у 200 K около 1,0 моль (воздух), у 500 K около 2,0 моль (воздух и вся вода); разность — вода

Обратите внимание. Количество газа нужно считать по каждой точке графика отдельно по $n = pV/(RT)$, а не из $V \propto T$ с постоянным n: между 270 и 373 K лёд тает, вода испаряется, и n растёт.

Проверка. Размерность: Па·м^3/(Дж/(моль·K)·K)=моль. Физический смысл скачка около 373 K: при 100 °C давление насыщенного пара воды равно 10^5 Па, то есть $p/2$. Если воды $\nu \approx 1$ моль и воздуха $n_0 \approx 1$ моль, то парциальное давление пара, когда испарилась вся вода, равно как раз $p\,\nu/(n_0 + \nu) = p/2$: вся вода превращается в пар именно около 373 K, и график круто идёт вверх; это согласуется с найденным $\nu \approx 1$ моль. Проверка по точке $T = 400$ K: $n = 2 \cdot 10^5 \cdot 33{,}3 \cdot 10^{-3}/(8{,}31 \cdot 400) \approx 2{,}00$ моль — те же 2 моль.

Ответ. $m_л \approx 18$ г (около 1 моль льда).