Конденсаторы и пять ключей

Задача 10. [МОШ 2013/14, 10 класс, задача 10] В цепи, схема которой изображена на рисунке, по очереди замыкают ключи K_1 – K_5, выжидая каждый раз достаточно длительное время до окончания процессов зарядки конденсаторов. Во сколько раз отличаются количества теплоты, выделившиеся в резисторе R после замыкания ключа K_1 и ключа K_5? До его замыкания все остальные ключи уже были замкнуты. Сопротивления всех проводов и источника тока пренебрежимо малы.

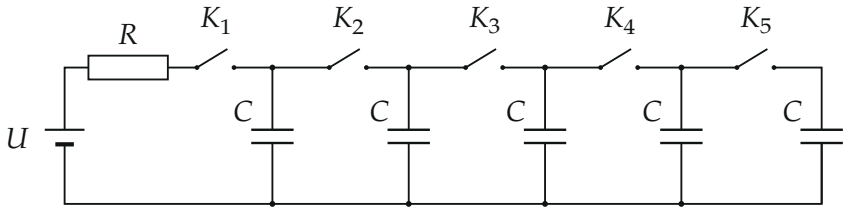


Схема условия: источник U, резистор R, пять ключей и пять одинаковых конденсаторов C

▲ **Решение. Что происходит.** Замыкание ключа подключает к источнику ещё один незаряженный конденсатор. Заряжается он в два этапа. Сначала, мгновенно (быстрее, чем успеет заметно измениться ток через R), заряд растекается с уже заряженных конденсаторов на новый по проводам без сопротивления: энергия на этом этапе уходит не в резистор R (в искру, излучение, контакты ключа), а напряжение на всех конденсаторах выравнивается на меньшем значении. Потом через R источник дозаряжает всю батарею конденсаторов до U, и вот эта часть греет резистор. Класс задачи — энергетический баланс при зарядке конденсаторов.

Обозначения. C — ёмкость одного конденсатора; U — напряжение источника; k — номер замыкаемого ключа; Q_k — количество теплоты в R после замыкания ключа K_k; q — заряд, прошедший через источник.

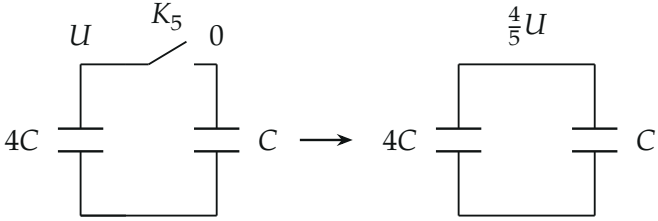
1. Ключ K_1. До замыкания все конденсаторы не заряжены. После замыкания источник заряжает конденсатор C через R от 0 до U: заряд, прошедший через источник, $q = CU$. Работа источника $A = qU = CU^2$.

Энергия конденсатора $W = CU^2/2$. По закону сохранения энергии выделившееся в резисторе тепло

$$Q_1 = A - W = CU^2 - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{2}.$$

(Результат не зависит от R: при большем сопротивлении заряд идёт дольше, но тепла выделяется столько же.)

2. Перед замыканием ключа K_k. Ключи $K_1, \ldots, K_{k-1}$ замкнуты давно, соответствующие $k-1$ конденсаторов соединены параллельно, заряжены до U и вместе имеют ёмкость $(k-1)C$ и заряд $(k-1)CU$. Конденсатор номер k не заряжен.



до замыкания K_5 после (мгновенно, без участия R)

Для $k = 5$: четыре заряженных конденсатора (общая ёмкость $4C$, напряжение U) и один незаряженный; после замыкания K_5 заряд делится, напряжение становится $\frac{4}{5}U$

3. Замыкание K_k: мгновенное перераспределение заряда. Новый конденсатор соединён с остальными проводом без сопротивления, а ток через R ограничен: за очень малое время заряд через R не успевает пройти. Заряд системы из k конденсаторов сохраняется (закон сохранения заряда для изолированной от источника на это время системы):

$$(k-1)CU = kC\,U'_k, \qquad U'_k = \frac{k-1}{k}\,U.$$

Энергия на этом этапе уменьшается:

$$\Delta W_{\text{иск}} = \frac{(k-1)CU^2}{2} - \frac{kCU'^2_k}{2} = \frac{(k-1)CU^2}{2k}.$$

Она выделяется в проводах, контактах ключа, излучением — но не в резисторе R.

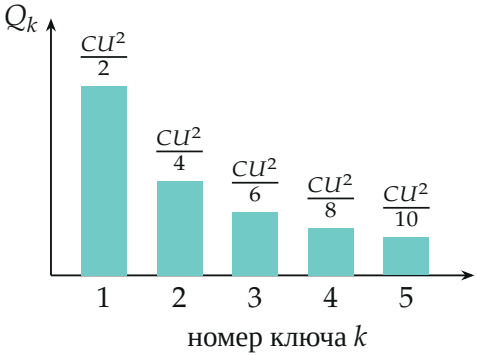
4. Дозарядка через резистор. Теперь напряжение на конденсаторах U'_k, а у источника U: батарея ёмкостью kC заряжается до U через R. Заряд через источник $q = kC(U - U'_k) = kC \cdot U/k = CU$. Работа источника $A = qU = CU^2$. Прирост энергии конденсаторов

$$\Delta W = \frac{kCU^2}{2} - \frac{kCU_k'^2}{2} = \frac{CU^2(2k-1)}{2k}.$$

Тепло в резисторе (закон сохранения энергии):

$$Q_k = A - \Delta W = CU^2 - \frac{CU^2(2k-1)}{2k} = \frac{CU^2}{2k}.$$

Для $k = 1$ получается $CU^2/2$, как в пункте 1.



Тепло в R после замыкания k-го ключа: $Q_k = CU^2/(2k)$ — с каждым ключом вдвое, втрое, ... меньше

5. Второй способ. Заряжается батарея ёмкостью kC через R от напряжения U'_k до U; при зарядке через резистор тепло равно $\frac{1}{2}C_{\text{бат}}(\Delta U)^2$ (источник даёт $C_{\text{бат}}\Delta U \cdot U$, энергия растёт на $C_{\text{бат}}\Delta U\,(U - \Delta U/2)$, разность $\frac{1}{2}C_{\text{бат}}\Delta U^2$). Здесь $C_{\text{бат}} = kC$, $\Delta U = U - U'_k = U/k$:

$$Q_k = \frac{1}{2}kC\frac{U^2}{k^2} = \frac{CU^2}{2k}.$$

6. Отношение.

$$\frac{Q_1}{Q_5} = \frac{CU^2/2}{CU^2/10} = 5.$$



Для $k = 5$ (в долях CU^2): работа источника 1 делится на тепло в R (0,1) и рост энергии конденсаторов (0,9); отдельно — 0,4, потерянные в искре при выравнивании напряжений

Обратите внимание. Тепло в R не равно «энергии, потерянной при выравнивании»: потеря в искре $(k-1)CU^2/(2k)$ идёт мимо резистора. Если ошибочно записать всю потерю в резистор, получится $Q_k = CU^2/2$ для всех ключей и ответ 1.

Проверка. Размерность: CU^2 — Дж. Предел $k \to \infty$: $Q_k \to 0$ — в большой батарее почти заряженных конденсаторов добавка заряда мала. Баланс для $k = 5$ в долях CU^2: до замыкания энергия $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, после выравнивания $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (\frac{4}{5})^2 = 1{,}6$ (потеря 0,4 в искре), в конце $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$. Источник отдал 1, из них 0,1 ушло в тепло R: $1{,}6 + 1 - 0{,}1 = 2{,}5$ — сходится.

Ответ. $\dfrac{Q_1}{Q_5} = 5$ (в резисторе после замыкания K_1 выделяется $CU^2/2$, после замыкания K_5 — $CU^2/10$).