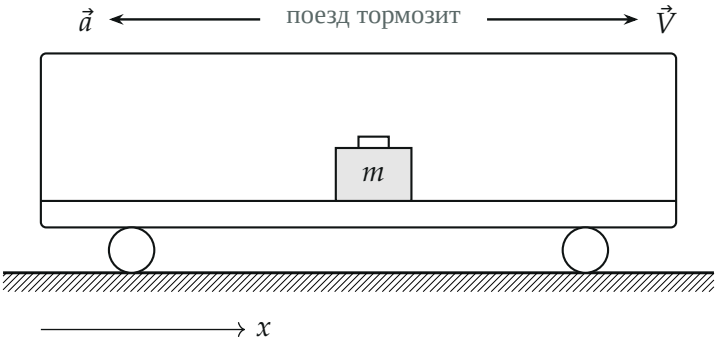
Чемодан в тормозящем поезде

Задача 1. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 1] Подходящий к станции поезд движется со скоростью $V = 36$ км/ч. Один из пассажиров поставил чемодан на пол длинного коридора вагона. Но тут поезд начал тормозить, двигаясь до полной остановки равнозамедленно с ускорением, равным по модулю $a = 2$ м/с^2. Чемодан при этом стал скользить по полу и прошёл до своей полной остановки путь $S = 12$ м относительно вагона. Определите коэффициент трения между чемоданом и полом, а также модуль максимальной скорости, которую имел чемодан относительно вагона.



Поезд едет вправо и тормозит; ось x — по движению поезда, ускорение поезда направлено против неё.

▲ **Решение. Что происходит.** Горизонтально на чемодан действует только трение скольжения, и оно тормозит чемодан *относительно пола*. Пол вместе с поездом тормозит с ускорением a, а чемодан — с ускорением μg, меньшим. Поэтому чемодан уезжает вперёд относительно вагона: пока поезд тормозит, относительная скорость растёт. Поезд остановился, пол стоит, и чемодан дотормаживает о неподвижный пол. Главная идея: два этапа, граница между ними — остановка поезда, и именно в этот момент относительная скорость наибольшая. Класс задачи — относительное движение с трением, считаем в системе отсчёта «земля».

Обозначения. Ось x — по движению поезда (рисунок выше), $t = 0$ — начало торможения; $g = 10$ м/с^2. $v_\text{п}$ и $v_\text{ч}$ — проекции скоростей поезда и

чемодана на ось x относительно земли, $u = v_ч - v_п$ — проекция скорости чемодана относительно вагона, $V = 10$ м/с.

1. Ускорение чемодана. Запишем второй закон Ньютона для чемодана в проекции на ось x. По вертикали $N = mg$, по горизонтали действует только трение скольжения. Чемодан скользит вперёд относительно пола, значит, сила трения направлена назад:

$$ma_x = -\mu N = -\mu mg \quad \Rightarrow \quad a_x = -\mu g.$$

Чемодан скользит, только если пол «не успевает» его удерживать: при $\mu g \geqslant a$ сила трения покоя, не превышающая μmg, хватило бы, чтобы тормозить чемодан вместе с поездом. Скольжение возможно, лишь когда $\mu g < a$; в конце проверим это числом.

2. Первый этап: поезд тормозит, $0 \leqslant t \leqslant t_1 = V/a$. Скорости линейно уменьшаются: $v_п = V - at$, $v_ч = V - \mu g\, t$. Относительная скорость

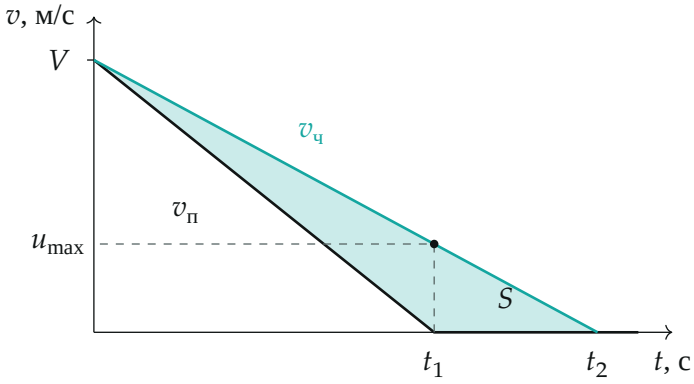
$$u = v_ч - v_п = (a - \mu g)\, t$$

растёт: чемодан движется вперёд относительно вагона. К моменту остановки поезда $t_1 = V/a$

$$u_1 = (a - \mu g)\,\frac{V}{a}, \qquad s_1 = \frac{(a - \mu g)\, t_1^2}{2} = \frac{(a - \mu g) V^2}{2a^2}.$$

3. Второй этап: поезд стоит, $t > t_1$. Вагон неподвижен, поэтому скорость относительно вагона $u = v_ч$ и она убывает с ускорением μg до нуля. Тормозной путь

$$s_2 = \frac{u_1^2}{2\mu g} = \frac{(a - \mu g)^2 V^2}{2a^2\, \mu g}, \qquad t_2 - t_1 = \frac{u_1}{\mu g}.$$



Скорости поезда (чёрная линия) и чемодана (бирюзовая) относительно земли. Вертикальный зазор между ними — относительная скорость u, а площадь залитого треугольника — путь S чемодана относительно вагона. Масштаб по оси t и по v взят для $\mu = 5/37$.

4. Полный путь и коэффициент трения. Путь относительно вагона — сумма двух путей:

$$S = s_1 + s_2 = \frac{(a-\mu g)V^2}{2a^2}\left(1 + \frac{a-\mu g}{\mu g}\right) = \frac{(a-\mu g)V^2}{2a\,\mu g}.$$

Это то же, что площадь треугольника на графике: основание $t_2 - t_1 = u_1/\mu g$, высота V. Решим уравнение относительно μg:

$$2aS\,\mu g = (a-\mu g)V^2 \quad \Rightarrow \quad \mu g\,(2aS + V^2) = aV^2,$$

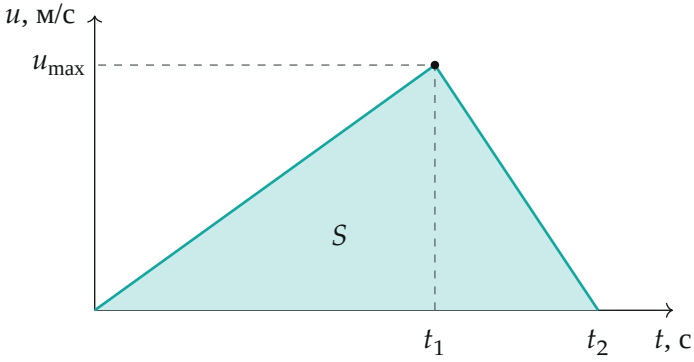
$$\mu = \frac{aV^2}{g\,(2aS + V^2)}.$$

Числа: $\mu = \dfrac{2\cdot 100}{10\,(2\cdot 2\cdot 12 + 100)} = \dfrac{200}{1480} = \dfrac{5}{37} \approx 0{,}135$. Тогда $\mu g \approx 1{,}35$ м/с^2 $< a = 2$ м/с^2: допущение о скольжении выполнено.

5. Максимальная скорость относительно вагона. На первом этапе u растёт, на втором убывает, поэтому максимум — в момент t_1 останов-

ки поезда, $u_{\max} = u_1$. Подставим $a - \mu g = \dfrac{2a^2 S}{2aS + V^2}$:

$$u_{\max} = (a - \mu g)\frac{V}{a} = \frac{2aSV}{2aS + V^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10}{148} \approx 3{,}24 \text{ м/с}.$$



Скорость чемодана относительно вагона: линейный рост до остановки поезда, затем линейный спад. Площадь под графиком равна $S = 12$ м.

Обратите внимание. Ускорение чемодана относительно *пола* равно μg на обоих этапах, а относительно *вагона* — нет: на первом этапе $a - \mu g$ (вагон тормозит сам), на втором μg. Если считать всё движение чемодана относительно вагона равнозамедленным с μg, получится неверный путь.

Проверка. Площадь под вторым графиком: $\frac{1}{2}\, u_{\max}\, t_2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}24 \cdot 7{,}4 \approx 12$ м $= S$, где $t_2 = t_1 + u_{\max}/\mu g = 5 + 2{,}4 = 7{,}4$ с. Предельные случаи: $S \to 0$ даёт $\mu \to a/g$ и $u_{\max} \to 0$ (чемодан едва скользит); $S \to \infty$ даёт $\mu \to 0$ и $u_{\max} \to V$: без трения чемодан сохраняет скорость V, а поезд останавливается.

Физический смысл: чемодан сначала «догоняет» вперёд тормозящий вагон, а затем тормозится трением о вагон, ставший неподвижным.

Ответ. $\mu = \dfrac{aV^2}{g\,(2aS + V^2)} = \dfrac{5}{37} \approx 0{,}135$; $u_{\max} = \dfrac{2aSV}{2aS + V^2} \approx 3{,}24$ м/с.