Гелий над ртутью

Задача 2. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 2] На рисунке изображены два вертикальных сообщающихся цилиндрических сосуда. Верх левого сосуда герметично запаян, и этот сосуд частично заполнен гелием. Правый сосуд до краёв наполнен ртутью так, что часть ртути находится в левом сосуде, и гелий заперт ею. Система помещена в вакуум. Гелию начинают медленно сообщать теплоту и продолжают нагревание до тех пор, пока ртуть остаётся в левом сосуде. Определите удельную теплоёмкость гелия в этом процессе.

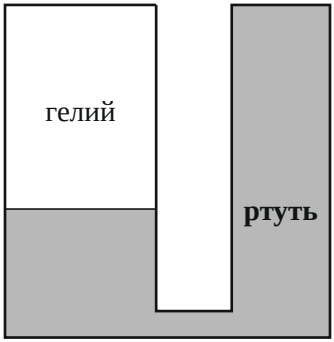


Рисунок условия: верх левого сосуда закрыт, правый сосуд заполнен ртутью до краёв; края сосудов на одной высоте.

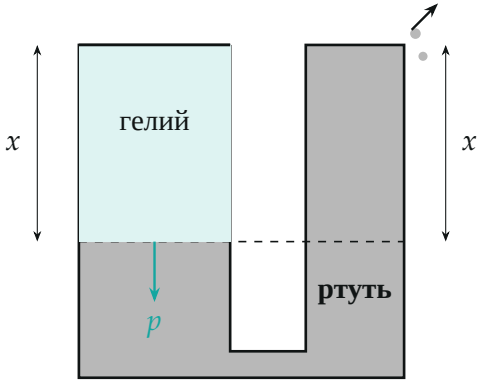
▲ **Решение.** **Что происходит.** Гелий нагревается и расширяется, ртуть вытесняется из левого сосуда в правый и переливается через его край. Главная идея: в таком устройстве давление гелия зависит только от длины его столба, поэтому в процессе p пропорционально V. Дальше — первый закон термодинамики для малого нагревания: он даёт теплоёмкость. Класс задачи — теплоёмкость в нестандартном процессе, найденная из первого закона и уравнения состояния.

Обозначения. x — высота столба гелия (от запаянного верха до поверхности ртути в левом сосуде), S — площадь сечения левого сосуда, $V = Sx$ — объём гелия, p — его давление, ρ — плотность ртути, ν — число молей гелия (постоянно: сосуд герметичен), $\mu = 4$ г/моль — его молярная масса, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

1. Давление гелия. Рассмотрим произвольный момент процесса и горизонтальную плоскость, проходящую по поверхности ртути в левом сосуде (штриховая линия на рисунке). Ртуть в обоих сосудах — одна связная жидкость, в ней давление на одной высоте одинаково. Слева в этой плоскости давление равно давлению гелия p. Справа над плоскостью — столб ртути высотой x: правый сосуд заполнен до краёв, а края сосудов на одной высоте с запаянным верхом левого, поэтому над плоскостью справа ровно столько же ртути, сколько слева над ней гелия. Над ртутью справа вакуум, значит давление в плоскости равно гидростатическому давлению столба:

$$p = \rho g x = \frac{\rho g}{S} V = \alpha V, \qquad \alpha = \frac{\rho g}{S} = \text{const}.$$

Давление гелия пропорционально его объёму: в pV-координатах процесс — отрезок прямой, выходящей из начала координат.



Слева высота столба гелия x, справа над той же горизонталью — столб ртути такой же высоты x. Бирюзовая стрелка — давление гелия на ртуть; при росте x ртуть переливается через край правого сосуда.

2. Первый закон термодинамики для малого нагревания. Пусть температура гелия выросла на малое ΔT, объём на малое ΔV. Гелий одноатомный, поэтому изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$, работа газа $A = p\,\Delta V$ (на малом шаге давление практически постоянно).

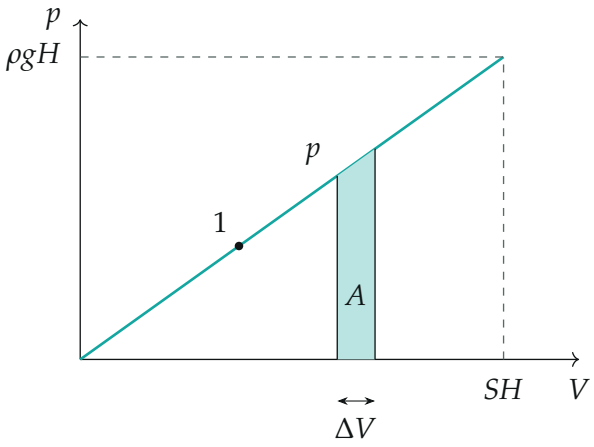
Тогда полученная теплота

$$Q = \Delta U + A = \tfrac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T + p\,\Delta V.$$

3. Связь ΔV и ΔT. Уравнение Клапейрона — Менделеева $pV = \nu RT$ вместе с $p = \alpha V$ даёт $\alpha V^2 = \nu RT$. При малом изменении V левая часть меняется на $2\alpha V\,\Delta V = 2p\,\Delta V$, правая — на $\nu R\,\Delta T$:

$$\nu R\,\Delta T = 2p\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad p\,\Delta V = \tfrac{1}{2}\,\nu R\,\Delta T.$$

Работа газа равна половине $\nu R\,\Delta T$; при изобарном нагревании она была бы вдвое больше, потому что здесь часть прироста pV даёт рост давления.



Процесс на pV-диаграмме — прямая через начало координат, она продолжается, пока ртуть остаётся в левом сосуде (до $V = SH$, где H — высота сосудов). Точка 1 — начальное состояние. Бирюзовая полоска — работа $A = p\,\Delta V$ на малом шаге.

4. Теплоёмкость. Подставим работу в первый закон:

$$Q = \tfrac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T + \tfrac{1}{2}\,\nu R\,\Delta T = 2\,\nu R\,\Delta T.$$

Масса гелия $m = \nu\mu$; удельная теплоёмкость $c = \dfrac{Q}{m\,\Delta T}$:

$$c = \frac{2\nu R}{\nu\mu} = \frac{2R}{\mu} = \frac{2 \cdot 8{,}31}{0{,}004} \approx 4155 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Знак: $Q > 0$ при $\Delta T > 0$, гелий действительно получает теплоту при нагревании. Так как α постоянно на всём процессе, c одна и та же в любой его точке, и это значение — искомое.

Обратите внимание. Тепло сообщают только гелию, поэтому ртуть — не часть системы, и её нагрев и вытекание в расчёте не участвуют. Условие $p \propto V$ выполнено лишь пока ртуть остаётся в левом сосуде: потом давление уже не растёт.

Проверка. Вторым способом: процесс $p\,V^{-1} = \text{const}$ — политропа с показателем $n = -1$ в записи $pV^n = \text{const}$; молярная теплоёмкость политропы $C = C_V + \dfrac{R}{1-n} = \frac{3}{2}R + \frac{R}{2} = 2R$, то же. Значение лежит между изохорным $\frac{3}{2}R/\mu \approx 3116$ и изобарным $\frac{5}{2}R/\mu \approx 5194$ Дж/(кг·К): работа расширения здесь меньше, чем при постоянном давлении, потому что давление растёт вместе с температурой, но больше нуля.

Физический смысл: три четверти теплоты идут на нагрев гелия и четверть — на работу по выдавливанию ртути.

Ответ. $c = \dfrac{2R}{\mu} \approx 4155$ Дж/(кг·К), где μ — молярная масса гелия.