Участок цепи из конденсаторов

Задача 3. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 3] Участок AB электрической цепи состоит из одинаковых конденсаторов ёмкостью C каждый. Найдите общую ёмкость участка AB.

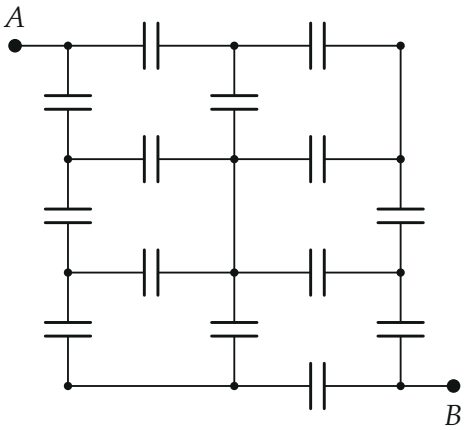
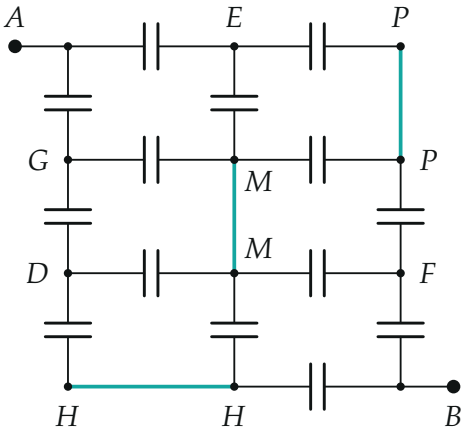


Рисунок условия: все конденсаторы имеют ёмкость C.

▲ **Решение. Что происходит.** Схема не сводится к последовательным и параллельным соединениям, поэтому формулы для батарей сразу не применить. Главная идея — найти узлы с одинаковыми потенциалами. Конденсатор между такими узлами не заряжен, его можно выбросить, а сами узлы — соединить проводником: распределение зарядов от этого не изменится. Потенциалы части узлов найдём из симметрии схемы, остальных — из сохранения заряда. Класс задачи — ёмкость сложной схемы через эквивалентную схему.

Обозначения. Подключим к A и B источник с напряжением U и положим $\varphi_B = 0$, $\varphi_A = U$. Всё, что соединено проводом без конденсаторов, — один узел с одним потенциалом. Назовём узлы буквами (рисунок ниже): провода — слева внизу, в центральном столбце и справа вверху; одинаковые буквы стоят у точек одного узла.



Узлы схемы. Бирюзовые участки — провода; одинаковые буквы — один узел.

1. Схема без проводов. Нарисуем те же четырнадцать конденсаторов между девятью узлами A, E, G, P, M, D, F, H, B (рисунок ниже). Для наглядности расположим узлы симметрично: схема переходит сама в себя при зеркальном отражении относительно вертикали, проходящей через P, M, D (ось симметрии), с обменом $A \leftrightarrow B$, $E \leftrightarrow F$, $G \leftrightarrow H$; эти три узла лежат на оси и остаются на месте.

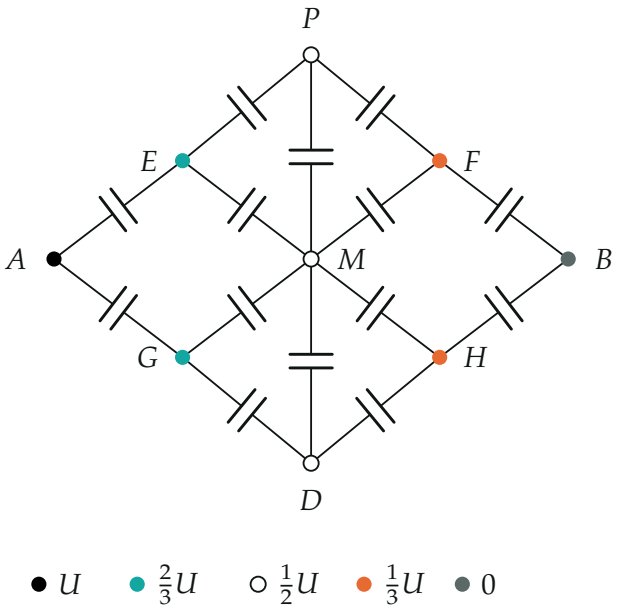


Схема из девяти узлов. Цвет узла — его потенциал (найден в пунктах 2 и 3); стоящие на оси узлы — белые.

2. Потенциалы узлов на оси. Если поменять полюса источника местами и отразить схему, получится та же схема с теми же ёмкостями, но потенциалы φ заменятся на $U-\varphi$. Решение для данной схемы единственно, поэтому потенциал зеркального узла равен $U-\varphi$: $\varphi_B = U-\varphi_A$, $\varphi_F = U-\varphi_E$ и т. д. Узел на оси сам себе зеркален, значит $\varphi = U-\varphi$:

$$\varphi_P = \varphi_M = \varphi_D = \frac{U}{2}.$$

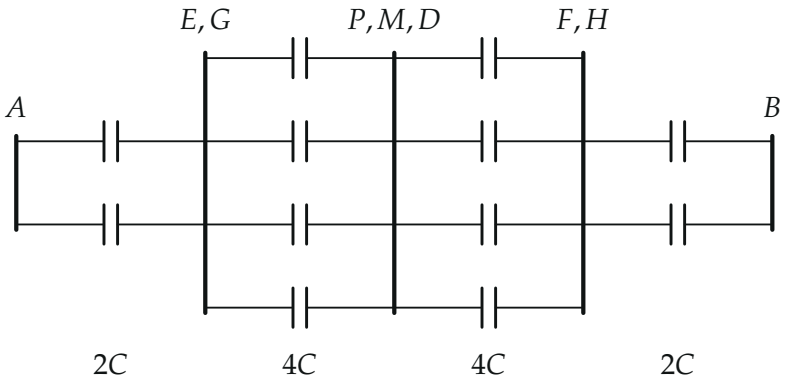
3. Остальные узлы — из сохранения заряда. Узел E ни к чему, кроме конденсаторов, не подключён, его суммарный заряд не меняется и равен нулю. Заряды обкладок, обращённых к E, — это $C(\varphi_E-\varphi)$ для конденсаторов EA, EP, EM:

$$C(\varphi_E-U)+C\Big(\varphi_E-\frac{U}{2}\Big)+C\Big(\varphi_E-\frac{U}{2}\Big)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_E=\frac{2U}{3}.$$

У узла G соседи A, M, D с теми же потенциалами U, $\frac{U}{2}$, $\frac{U}{2}$, поэтому $\varphi_G = \frac{2U}{3}$. Зеркальные узлы: $\varphi_F = \varphi_H = U-\frac{2U}{3} = \frac{U}{3}$.

Итог: потенциалы U у A; $\frac{2}{3}U$ у E и G; $\frac{1}{2}U$ у P, M, D; $\frac{1}{3}U$ у F и H; 0 у B.

4. Эквивалентная схема. Конденсаторы PM и MD стоят между узлами с одинаковым потенциалом $\frac{U}{2}$: заряд на них нулевой, их можно убрать. Затем объединим проводником узлы одного потенциала: E с G, P с M и D, F с H — токов и зарядов это не изменит. Остаются четыре группы параллельных конденсаторов, соединённых последовательно (рисунок): A с E,G — два конденсатора (EA, GA); E,G с P,M,D — четыре (EP, EM, GM, GD); P,M,D с F,H — четыре (PF, MF, MH, DH); F,H с B — два (FB, HB).



Эквивалентная схема: четыре группы параллельных конденсаторов, соединённых последовательно; под группами — их общая ёмкость.

5. Ёмкость. Параллельные конденсаторы складывают ёмкости: группы имеют ёмкости $2C$, $4C$, $4C$, $2C$. При последовательном соединении складываются обратные величины:

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{4C} + \frac{1}{4C} + \frac{1}{2C} = \frac{3}{2C} \quad \Rightarrow \quad C_{AB} = \frac{2C}{3}.$$

Обратите внимание. Нельзя соединять проводником узлы, потенциалы которых не доказаны равными: например, E и P соединять нельзя, у них разность потенциалов $\frac{U}{6}$. Равенство потенциалов узлов, не лежащих на оси (E и G, F и H), получилось из сохранения заряда, а не из симметрии.

Проверка. Заряд источника: из A уходит заряд на двух конденсаторах, $q = 2C\left(U - \frac{2}{3}U\right) = \frac{2}{3}CU$, то есть $C_{AB} = q/U = \frac{2}{3}C$, как и в эквивалентной схеме. Расчёт потенциалов всех девяти узлов из условия сохранения заряда на каждом даёт те же значения. Последовательная цепочка имеет ёмкость, меньшую ёмкости каждой из групп ($2C$, $4C$, $4C$, $2C$): $\frac{2}{3}C < 2C$.

Физический смысл: при подключении источника на конденсаторах PM и MD напряжения нет, а остальные двенадцать делят напряжение по ступеням $\frac{U}{3}$, $\frac{U}{6}$, $\frac{U}{6}$, $\frac{U}{3}$.

Ответ. $C_{AB} = \dfrac{2C}{3}$.