Четыре провода с током

Задача 4. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 4] Как показали эксперименты Ж.-Б. Био и Ф. Савара 1820 года, магнитное поле длинного провода с током убывает обратно пропорционально расстоянию от длинного прямого провода. Четыре очень длинных прямых провода с протекающими по ним равными по модулю постоянными токами расположены параллельно друг другу так, как показано на рисунке (сечения проводов плоскостью рисунка находятся в вершинах квадрата). Известно, что модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого одним проводом в соседней с ним вершине этого квадрата, равен B, а поле самого провода на его оси равно нулю.

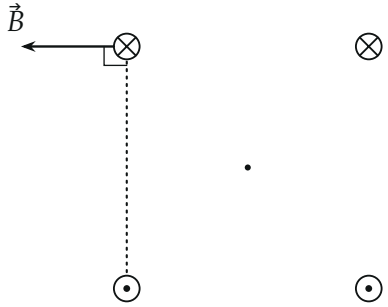


Рисунок условия: токи в верхних проводах направлены от нас, в нижних — к нам; $\vec{B}$ — поле, создаваемое нижним левым проводом в верхней левой вершине.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый провод создаёт поле, перпендикулярное прямой от провода к точке наблюдения; модуль поля обратно пропорционален расстоянию. Поле в точке — векторная сумма полей трёх (в вершине) или четырёх (в центре) проводов. Главная идея: считать суммы по проекциям на две оси, направления полей находить по правилу буравчика. Класс задачи — суперпозиция магнитных полей.

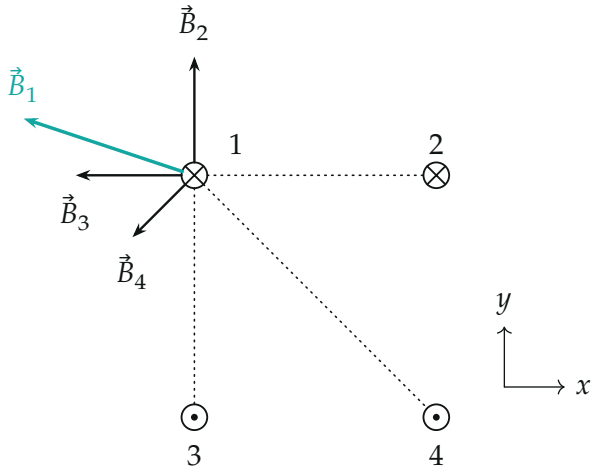
Обозначения. Пронумеруем провода: 1 — верхний левый (ток от нас), 2 — верхний правый (от нас), 3 — нижний левый (к нам), 4 — нижний правый (к нам). Сторона квадрата a. Ось x — вправо вдоль верхней стороны, ось y — вверх. Поле провода на расстоянии r: $B(r) = B\dfrac{a}{r}$, ведь на расстоянии a оно равно B по условию.

Правило направления. Вокруг провода с током *от нас* (⊗) линии поля идут по часовой стрелке, вокруг провода с током *к нам* (⊙) — против часовой. Вектор поля касается окружности вокруг провода, то есть перпендикулярен прямой, соединяющей провод с точкой наблюдения.

Пункт 1. Поле в вершине. Найдём поле в вершине 1 — там, где стоит провод 1; его собственное поле на его оси равно нулю, поэтому складываются поля проводов 2, 3, 4.

1. Модули. Соседние провода 2 и 3 на расстоянии a: $B_2 = B_3 = B$. Провод 4 — на диагонали, расстояние $a\sqrt{2}$: $B_4 = B\,\dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{B}{\sqrt{2}}$.

2. Направления. Провод 2 лежит справа от вершины 1, ток от нас: линии идут по часовой, в точке слева от провода поле направлено вверх: $\vec{B}_2\uparrow$. Провод 3 лежит ниже вершины 1, ток к нам: линии против часовой, над проводом поле направлено влево: $\vec{B}_3\leftarrow$. Провод 4 лежит справа внизу на диагонали, ток к нам: в точке слева вверху от провода поле против часовой направлено влево-вниз, перпендикулярно диагонали: $\vec{B}_4$ под 45° к осям, вниз и влево.



Поля трёх проводов в вершине 1 и их сумма $\vec{B}_1$ (масштаб $B = 1{,}4$ см). Каждый вектор перпендикулярен пунктирной линии к своему проводу.

3. Проекции и сумма. Запишем сумму векторов в проекциях на оси x и y в общем виде, затем подставим модули:

$$B_{1x} = -B_3 - B_4\cos 45^\circ = -B - \frac{B}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}B,$$

$$B_{1y} = B_2 - B_4\sin 45^\circ = B - \frac{B}{2} = \frac{1}{2}B.$$

Модуль суммы

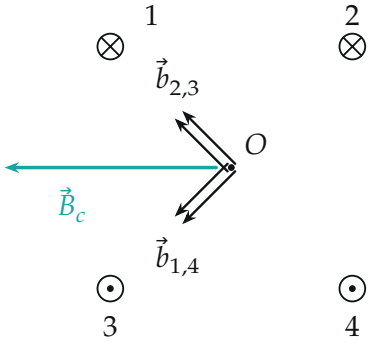
$$B_1 = \sqrt{B_{1x}^2 + B_{1y}^2} = B\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\,B \approx 1{,}58\,B.$$

4. Остальные вершины. Квадрат с такой раскладкой токов переходит в себя при зеркальном отражении относительно вертикальной оси (токи в верхних проводах одинаковы, в нижних тоже); при отражении относительно горизонтальной оси токи меняются на противоположные, а модуль суммарного поля не меняется. Поэтому в остальных вершинах модуль поля такой же. Прямой расчёт для вершин 2, 3, 4 это подтверждает: в вершине 2 получается $\vec{B} = (-\frac{3}{2}B,\ -\frac{1}{2}B)$, в вершине 3 — то же $(-\frac{3}{2}B,\ -\frac{1}{2}B)$, в вершине 4 — $(-\frac{3}{2}B,\ +\frac{1}{2}B)$.

Пункт 2. Поле в центре. Обозначим поля проводов в центре $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_4$. Расстояние от центра до каждого провода $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, поэтому все четыре поля одинаковы по модулю:

$$B_c = B\,\frac{a}{a/\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,B.$$

Направление находим по правилу буравчика: центр лежит от провода 1 на диагонали вниз вправо, провод 1 с током от нас — поле по часовой, в точке справа внизу от провода оно направлено вниз-влево, $\vec{b}_1$ под 45°. Так же для остальных: поле провода 4 (ток к нам, центр слева вверху от него) — тоже вниз-влево; поля проводов 2 и 3 — вверх-влево.



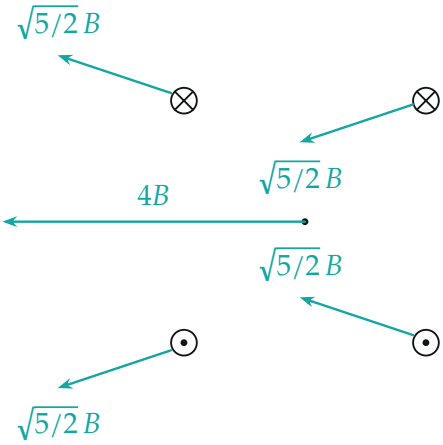
Поля четырёх проводов в центре O (масштаб $B = 0{,}7$ см): $\vec{b}_1 = \vec{b}_4$ и $\vec{b}_2 = \vec{b}_3$ (пары нарисованы рядом, чтобы стрелки не сливались); бирюзовая стрелка — сумма.

Проекции и сумма. Каждый вектор имеет проекции $\mp\sqrt{2}B\cos 45^\circ = \mp B$:

$$B_{cx} = -B - B - B - B = -4B, \qquad B_{cy} = -B + B + B - B = 0,$$

значит поле в центре направлено влево и

$$B_c = 4B.$$



Суммарное поле в вершинах и в центре (масштаб $B = 1$ см): в вершинах везде $\sqrt{5/2}\,B$, векторы направлены влево с наклоном вверх или вниз; в центре $4B$ влево.

Обратите внимание. Поле в вершине — от трёх проводов, а не от четырёх: собственное поле провода на его оси равно нулю. Поле диагонального провода слабее, но не пренебрежимо мало: без него получилось бы $\sqrt{B_3^2 + B_2^2} = \sqrt{2}\,B$ вместо $\sqrt{5/2}\,B$.

Проверка. Центр — вторым способом. Провода 1 и 4 несут противоположные токи и лежат на одной диагонали: между ними их поля направлены одинаково, поэтому складываются: $2\sqrt{2}\,B$ вдоль этой диагонали. Так же провода 2 и 3 дают $2\sqrt{2}\,B$ вдоль другой диагонали, перпендикулярной первой. Складываем перпендикулярные векторы: $\sqrt{(2\sqrt{2}B)^2 + (2\sqrt{2}B)^2} = 4B$ — совпадает. Размерность: B — индукция, множители безразмерные.

Физический смысл: в центре все четыре поля «закручены» в одну сторону вдоль горизонтали, поэтому суммарное поле самое сильное; в вершине поля трёх проводов частично компенсируют друг друга по вертикали.

Ответ. Во всех вершинах квадрата $B_1 = \sqrt{5/2}\,B \approx 1{,}58\,B$; в центре квадрата $B_2 = 4B$.