Груз на пружине под столом

Задача 5. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 5] Тележка высотой $H = 30$ см и длиной $L = 40$ см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно. К крышке стола снизу прикрепили лёгкую пружину жёсткостью $k = 50$ Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой $m = 0{,}4$ кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте $h = 42$ см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться тележка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?

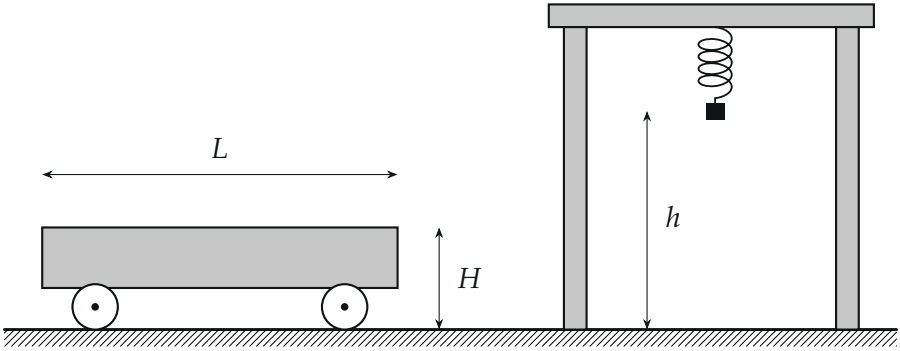


Рисунок условия: тележка и стол с пружиной (схематично, не в масштабе).

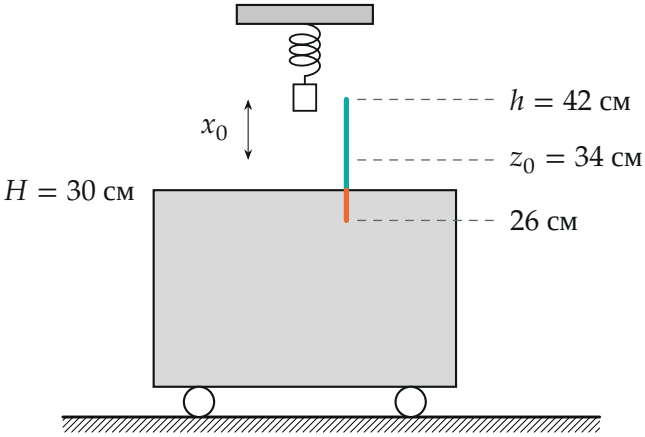
▲ **Решение. Что происходит.** Отпущенный груз колеблется на пружине по вертикали около положения равновесия. То он выше крыши тележки, то ниже. Тележка проезжает под грузом, если за всё время её прохода — от встречи передней кромки с вертикалью груза до ухода задней — груз остаётся выше крыши. Значит, длительность прохода L/v не должна превышать времени, в течение которого груз выше H. Отсюда ограничение на v *снизу*: быстрее проехать безопаснее. Класс задачи — гармонические колебания и условие по времени, угловая скорость и амплитуда находятся из условия.

Обозначения. Ось z — вертикаль вверх, $z = 0$ на полу; $z(t)$ — высота груза, $t = 0$ — момент, когда груз отпустили. $g = 10$ м/с^2. Частота колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$.

1. Положение равновесия и амплитуда. В равновесии сила тяжести уравновешена силой упругости: $mg = kx_0$, где x_0 — удлинение пружины в равновесии:

$$x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}4 \cdot 10}{50} = 0{,}08 \text{ м} = 8 \text{ см}.$$

Равновесие — на высоте $z_0 = h - x_0 = 34$ см: пружина растянута вниз от недеформированного состояния (высота h) на x_0. Груз отпустили в точке h без скорости, значит, это верхняя точка колебаний, а амплитуда — расстояние от неё до равновесия: $x_0 = 8$ см. Груз колеблется между $z = h - 2x_0 = 26$ см и $z = h = 42$ см.



Вертикальные размеры в масштабе 1 см = 10 см. Груз колеблется между 26 и 42 см. Бирюзовая часть пути — выше крыши тележки, морковная — ниже крыши, где груз попал бы на тележку.

2. Закон движения груза. Сила тяжести и сила упругости вместе дают возвращающую силу $-k\,(z - z_0)$, пропорциональную смещению от равновесия, поэтому колебания гармонические с частотой $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{125} \approx 11{,}2$ с$^{-1}$. В начальный момент груз в верхней точке, поэтому

$$z(t) = z_0 + x_0 \cos \omega t.$$

Нижняя точка $z_0 - x_0 = 26$ см ниже крыши $H = 30$ см, поэтому груз пе-

риодически опускается в зону тележки, и при слишком малой скорости тележка обязательно его заденет.

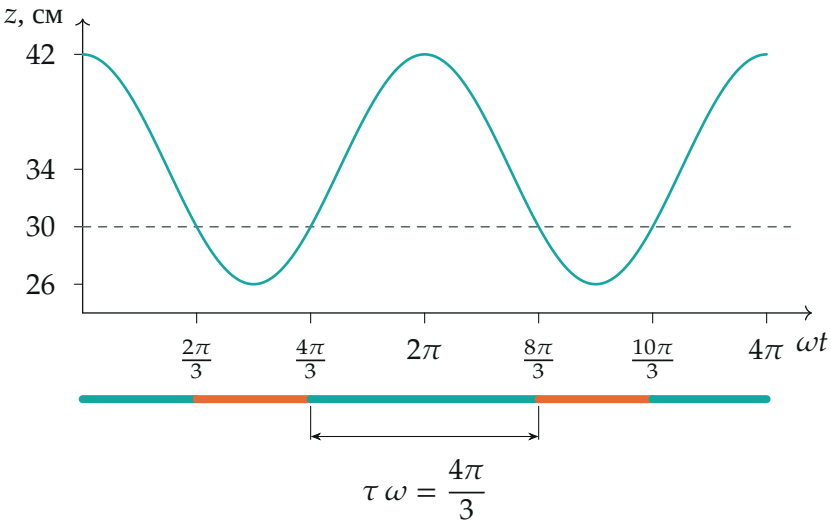
3. Когда груз выше крыши. Условие $z > H$ даёт

$$\cos\omega t > \frac{H - z_0}{x_0} = \frac{30 - 34}{8} = -\frac{1}{2}.$$

За период это выполняется при $|\omega t - 2\pi n| < \dfrac{2\pi}{3}$, то есть интервал, когда груз выше крыши, длится

$$\tau = \frac{4\pi}{3\,\omega},$$

а на остальные $\dfrac{2\pi}{3\omega}$ каждого периода груз опускается ниже H.



Высота груза в зависимости от ωt (ось z начинается с 24 см). Бирюзовые участки полосы внизу — груз выше крыши ($z > H$), морковные — ниже. Полный интервал над крышей длится $\omega\tau = 4\pi/3$.

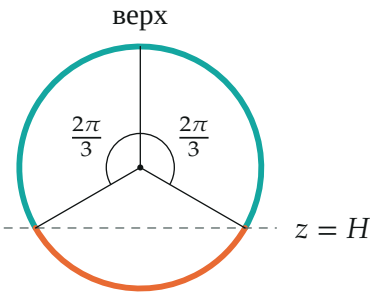
4. Условие проезда. Тележка движется равномерно, мимо груза она проходит за время L/v: от момента, когда её передняя кромка достигла вертикали груза, до момента, когда задняя кромка эту вертикаль покинула. Всё это время груз должен быть выше крыши, то есть проход

целиком умещается в один интервал длительностью τ. Тележку можно запустить так, чтобы проход пришёлся на середину интервала: первый интервал после отпускания — половинный, но следующие полные. Условие $L/v \leqslant \tau$ даёт

$$v \geqslant \frac{L}{\tau} = \frac{3\,\omega L}{4\pi} \qquad \Rightarrow \qquad v_{\min} = \frac{3L}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3\cdot 0{,}4}{4\pi}\sqrt{125} \approx 1{,}07 \text{ м/с}.$$

В общем виде: $v_{\min} = \dfrac{L\omega}{2\left(\pi - \arccos\dfrac{h-H-x_0}{x_0}\right)}$; здесь $\dfrac{h-H-x_0}{x_0} = \dfrac{1}{2}$, $\arccos\frac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, знаменатель равен $2\cdot\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

Тот же интервал — через круг. Равномерное вращение точки по окружности радиуса x_0 с угловой скоростью ω имеет проекцию на вертикаль, равную $x_0\cos\omega t$. Груз выше крыши, пока точка выше хорды на уровне H; эта хорда стоит на расстоянии $\frac{1}{2}x_0$ ниже центра, и над ней лежит дуга $240^\circ = 4\pi/3$ (на рисунке — бирюзовая).



Точка равномерно вращается по окружности радиуса x_0 с угловой скоростью ω; её высота — это $z - z_0$. Бирюзовая дуга $4\pi/3$ — груз выше крыши, морковная $2\pi/3$ — ниже. Хорда лежит на $\frac{1}{2}x_0$ ниже центра, поэтому радиусы к её концам образуют с вертикалью 120°.

Обратите внимание. Проход тележки должен уместиться в интервал целиком: груз должен быть выше крыши, пока над ним проезжает любая часть тележки, а не только её середина. Поэтому в ответ входит длина L,

а не $L/2$. Частота $\omega = \sqrt{k/m}$ не зависит от g и от высоты, а вот амплитуда $x_0 = mg/k$ зависит от g.

Проверка. Размерность: $L\omega$ — метры на секунду. Три предельных случая для крыши на высоте H: при $H = z_0 = 34$ см интервал над крышей — половина периода, $v_{\min} = L\omega/\pi \approx 1{,}42$ м/с (подставив в общую формулу: $\arccos 0 = \pi/2$); при $H \to h$ интервал стягивается в точку и $v_{\min} \to \infty$ — тележка выше верхней точки груза не проедет ни при какой скорости; при $H < 26$ см груз всегда выше крышки, и тележка может ехать сколь угодно медленно. Наша крыша $H = 30$ см ниже уровня $z_0 = 34$ см, интервал над ней длиннее полупериода, и $v_{\min} \approx 1{,}07$ м/с меньше 1,42 м/с.

Физический смысл: за время одного периода груз проводит над крышей две трети времени; тележке нужно проскочить за них, не больше.

Ответ. $v_{\min} = \dfrac{3L}{4\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \approx 1{,}07$ м/с.