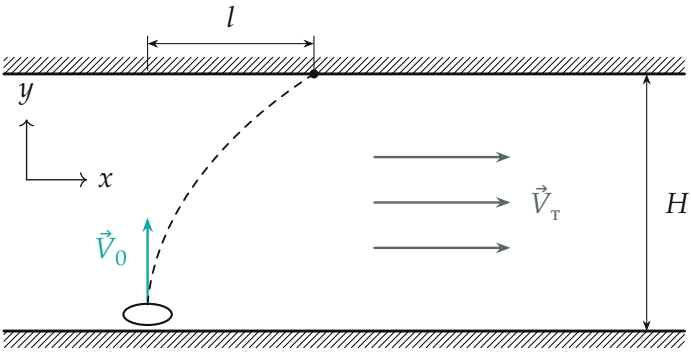
# Лодка с сопротивлением воды

**Задача 6.** [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 6] Лодку массой $m$ отправили на другой берег речки, сообщив ей начальную скорость $V_0$ в направлении, перпендикулярном течению. Ширина речки $H$, скорость её течения $V_т$, а время движения лодки от берега до берега $t$.

1) На какое расстояние $l$ (вдоль берега) снесло лодку течением при переправе?
2) Чему был равен модуль скорости лодки относительно воды в конце переправы, если сила $\vec{F}$ сопротивления движению, действующая на лодку со стороны воды, пропорциональна скорости $\vec{V}_{отн}$ лодки относительно воды ($\vec{F} = -k\vec{V}_{отн}$, где $k$ — известный постоянный коэффициент)?

Считайте, что скорость течения одинакова во всех точках речки.




*Лодка стартует с левого берега со скоростью $\vec{V}_0$ поперёк течения, течение уносит её вдоль оси $x$. За время переправы лодку снесло на расстояние $l$.*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Течение относится к лодке как «движущийся пол»: в системе отсчёта, связанной с водой, вода покоится, и на лодку действует только сила сопротивления воды. Она направлена против скорости лодки относительно воды, значит, не поворачивает эту скорость: в системе воды лодка движется *по прямой*, замедляясь. Начальная скорость лодки относительно воды — не $V_0$: берег неподвижен, вода течёт, и относительно воды лодка с самого начала движется ещё и против

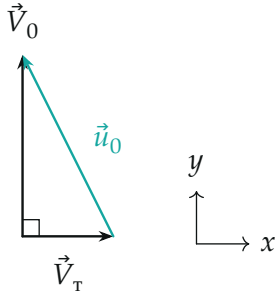
течения. Главная идея: перейти в систему воды, где путь прямой, а затем вернуться к берегу по закону сложения перемещений и воспользоваться подобием треугольников. Класс задачи — относительное движение с линейным сопротивлением.

**Обозначения.** Ось $x$ — вдоль течения, ось $y$ — поперёк реки от берега, с которого отплыла лодка. Относительно берега: $\vec{V}_0 = (0, V_0)$ — начальная скорость лодки, $\vec{V}_т = (V_т, 0)$ — скорость воды. Скорость лодки относительно воды $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_т$, где $\vec{v}$ — её скорость относительно берега; $\vec{u}_0$ — начальное значение $\vec{u}$; $\vec{s}$ — перемещение лодки относительно воды, $s = |\vec{s}|$.

**Пункт 1. Снос вдоль берега.**

**1. Переход в систему воды.** Скорость воды постоянна и одинакова во всех точках, поэтому система воды инерциальна, и законы Ньютона в ней записываются так же. Закон сложения скоростей: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}_т$. В начальный момент $\vec{V}_0 = \vec{u}_0 + \vec{V}_т$, откуда

$$\vec{u}_0 = \vec{V}_0 - \vec{V}_т = (-V_т, V_0), \qquad u_0 = \sqrt{V_0^2 + V_т^2}.$$




*Треугольник скоростей: $\vec{V}_0 = \vec{V}_m + \vec{u}_0$. Скорость лодки относительно воды направлена влево-вверх, против течения.*

**2. Движение относительно воды — по прямой.** Единственная сила, действующая на лодку в горизонтальной плоскости в системе воды, — сопротивление $\vec{F} = -k\vec{u}$, и она антипараллельна $\vec{u}$. По второму закону Ньютона $m\dfrac{d\vec{u}}{dt} = -k\vec{u}$: ускорение направлено против скорости, поэтому

направление $\vec{u}$ сохраняется. Значит, перемещение $\vec{s}$ лодки относительно воды параллельно $\vec{u}_0$.

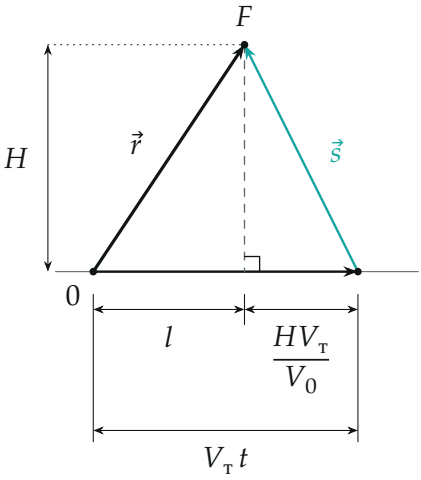
**3. Перемещения.** Закон сложения перемещений: перемещение лодки относительно берега равно перемещению относительно воды плюс перемещение воды за время переправы:

$$\vec{r} = \vec{s} + \vec{V}_\text{т}\, t.$$

В конце переправы $y$-координата лодки равна $H$; течение направлено по $x$, значит, $s_y = H$. Вектор $\vec{s}$ параллелен $\vec{u}_0$, и тогда треугольник из проекций $\vec{s}$ подобен треугольнику скоростей из $\vec{u}_0$:

$$\frac{|s_x|}{s_y} = \frac{V_\text{т}}{V_0} \quad \Rightarrow \quad s_x = -\frac{H\,V_\text{т}}{V_0}$$

(знак минус: лодка смещается против течения относительно воды).




*Перемещения (масштаб схематичный). $\vec{r}$ — перемещение лодки относительно берега, $\vec{s}$ — относительно воды, $V_m t$ — перемещение самой воды. Прямоугольный треугольник со сторонами $H$ и $HV_m/V_0$ подобен треугольнику скоростей.*

**4. Снос.** Проекция $\vec{r} = \vec{s} + \vec{V}_т t$ на ось $x$:

$$l = r_x = s_x + V_т\, t = V_т\, t - \frac{H\, V_т}{V_0} = V_т \left( t - \frac{H}{V_0} \right).$$

Так как лодка тормозится, переправа длится дольше $H/V_0$, и $l > 0$: лодку действительно сносит по течению.

**Пункт 2. Скорость в конце переправы.**

**5. Связь скорости и пути.** Второй закон Ньютона в системе воды в проекции на направление $\vec{u}_0$ (вдоль этого направления лодка и движется): $m \dfrac{du}{dt} = -ku$, где $u$ — модуль скорости относительно воды. Модуль скорости $u = \dfrac{ds}{dt}$ — производная пройденного пути. Тогда за малый промежуток $dt$

$$m\, du = -k\, u\, dt = -k\, ds.$$

Складываем малые изменения от начала до конца переправы (скорость изменилась от $u_0$ до $u_к$, путь — от нуля до $s$):

$$m\,(u_к - u_0) = -k\, s \quad \Rightarrow \quad u_к = u_0 - \frac{k}{m}\, s.$$

Скорость убывает линейно с пройденным путём; время в этом уравнении не участвует.

**6. Путь относительно воды.** Из подобия: $s_y = H$, а направление $\vec{s}$ то же, что у $\vec{u}_0$, поэтому $\dfrac{s_y}{s} = \dfrac{V_0}{u_0}$:

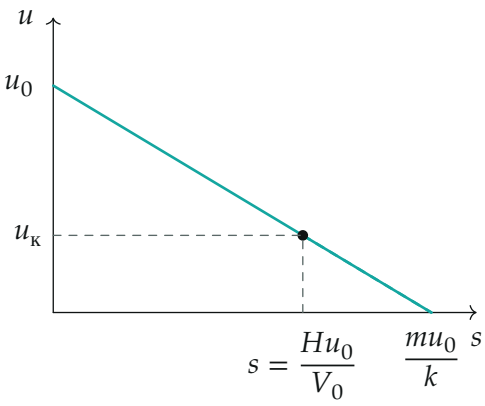
$$s = H\, \frac{u_0}{V_0}.$$

**7. Скорость в конце.** Подставим:

$$u_к = u_0 - \frac{k}{m} \cdot \frac{H\, u_0}{V_0} = u_0 \left( 1 - \frac{kH}{mV_0} \right) = \sqrt{V_0^2 + V_т^2} \left( 1 - \frac{kH}{mV_0} \right).$$

Лодка добирается до другого берега, только если $u_к \geqslant 0$, то есть при

$V_0 \geqslant kH/m$; иначе она остановится относительно воды раньше.




*Модуль скорости относительно воды линейно убывает с пройденным путём. Переправа заканчивается в точке $s = Hu_0/V_0$ — левее нуля скорости, если $V_0 > kH/m$.*

**Обратите внимание.** Скорость лодки относительно воды в начале — не $V_0$, а $\sqrt{V_0^2 + V_т^2}$: береговая скорость $V_0$ уже включает скорость воды. Ответ второго пункта не содержит $t$: скорость связана с *путём*, а не со временем.

**Проверка.** Вторым способом — в системе берега, в проекциях. Вдоль $y$: $m\dot{v}_y = -kv_y$, поэтому $v_y = V_0 e^{-kt'/m}$ и $y(t') = \dfrac{mV_0}{k}\left(1 - e^{-kt'/m}\right)$. К концу переправы $y = H$, откуда $e^{-kt/m} = 1 - \dfrac{kH}{mV_0}$. Вдоль $x$ сила — $-k(v_x - V_т)$; для $w = v_x - V_т$ получаем $m\dot{w} = -kw$, $w(0) = -V_т$, значит $w = -V_т e^{-kt'/m}$. Тогда $u_к = \sqrt{v_y^2 + w^2} = \sqrt{V_0^2 + V_т^2}\, e^{-kt/m}$ — то же значение. Снос: $x = V_т t + \int_0^t w\, dt' = V_т t - V_т \dfrac{m}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right) = V_т t - \dfrac{V_т H}{V_0}$ — совпадает с пунктом 1. Предел $k \to 0$: $u_к \to u_0$, $t = H/V_0$, $l = 0$: без сопротивления лодка идёт строго поперёк.

**Ответ.** 1) $l = V_т\left(t - \dfrac{H}{V_0}\right)$; 2) $u_к = \sqrt{V_0^2 + V_т^2}\left(1 - \dfrac{kH}{mV_0}\right)$, причём $V_0 \geqslant kH/m$.