Жидкость и пар под поршнем

Задача 7. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 7] В гладком цилиндре под подвижным поршнем находятся в равновесии ν молей жидкости и ν молей её пара (состояние 1 на pV-диаграмме). Систему «жидкость–пар» сначала медленно нагрели в изобарическом процессе 1–2, при этом её абсолютная температура возросла в 2 раза. Затем систему медленно охладили в адиабатическом процессе 2–3 до температуры T_3. Какое количество теплоты получила система «жидкость–пар» в процессе 1–2, если работы, совершённые этой системой в процессах 1–2 и 2–3, были одинаковыми? Молярная теплота парообразования в процессе 1–2 равна r. В процессе 2–3 конденсация не происходит. Считать пар идеальным газом с молярной теплоёмкостью в изохорном процессе $C_V = 3R$. Объём жидкости в состоянии 1 считать пренебрежимо малым по сравнению с объёмом пара.

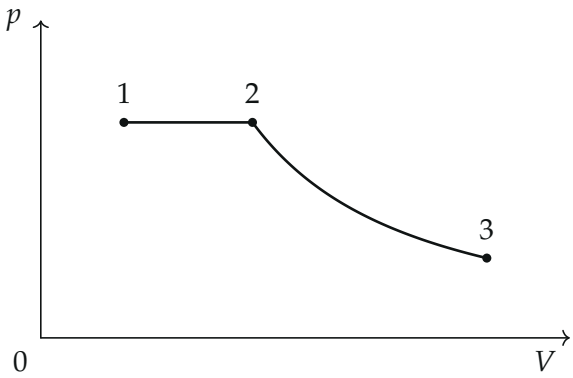
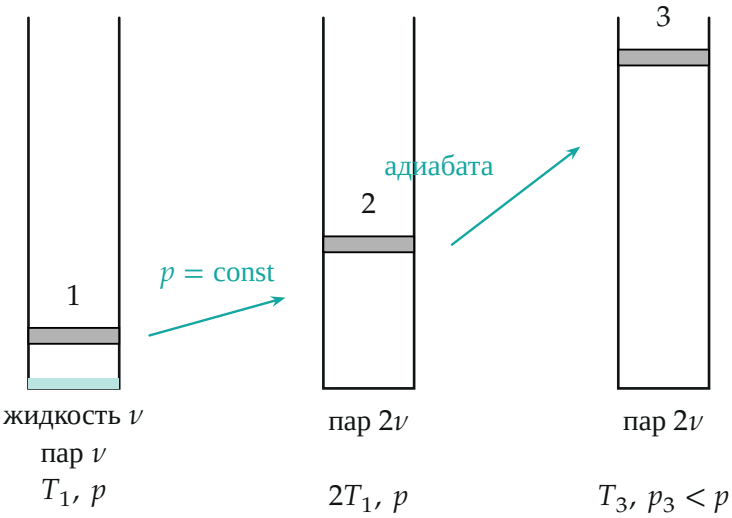


Рисунок условия: изобара 1–2 и адиабата 2–3 (схематично).

▲ **Решение. Что происходит.** В состоянии 1 жидкость и пар в равновесии, то есть пар насыщенный, а давление p равно давлению насыщенного пара при температуре T_1. При постоянном давлении температура кипения не меняется, поэтому сначала жидкость целиком испаряется при T_1, и только потом образовавшийся пар нагревается до $2T_1$. Ключевые факты: к состоянию 2 жидкости уже нет, а пара 2ν молей и он

идеальный газ. Работы на двух участках выражаются через температуры; их равенство связывает T_1 и T_3. Класс задачи — насыщенный пар: предположение, затем проверка.

Обозначения. p — давление на изобаре 1–2, T_1, $T_2 = 2T_1$ — температуры в состояниях 1 и 2, $C_V = 3R$, $C_p = C_V + R = 4R$.



Три состояния системы (объёмы пара — в масштабе для $C_V = 3R$: $V_2 = 4V_1$, $V_3 \approx 9{,}5V_1$; слой жидкости на рисунке утолщён). Между состояниями 1 и 2 жидкость испаряется целиком.

1. Состояние 1. Пар насыщенный: рядом жидкость. Для ν молей пара $pV_1 = \nu RT_1$ (объёмом жидкости пренебрегаем).

2. Состояние 2: жидкости уже нет. Допустим, что в состоянии 2 жидкость ещё осталась. Тогда пар насыщенный при температуре $2T_1$, и его давление $p_{\text{н}}(2T_1) > p_{\text{н}}(T_1) = p$, а на изобаре давление равно p. Противоречие. Значит, температура T_1 сохранялась, пока шло испарение, а к состоянию 2 жидкость вся испарилась, и пар в сосуде — 2ν молей ненасыщенного идеального газа с $pV_2 = 2\nu R \cdot 2T_1$, откуда $V_2 = 4V_1$.

3. Работа на изобаре 1–2. Давление постоянно, объём жидкости пренебрежимо мал:

$$A_{12} = p\,(V_2 - V_1) = 4\nu RT_1 - \nu RT_1 = 3\nu RT_1.$$

Из них νRT_1 — работа при испарении (рост числа молей пара при T_1), $2\nu RT_1$ — при нагревании 2ν молей пара.

4. Работа на адиабате 2–3. Теплообмена нет ($Q_{23} = 0$), газ — 2ν молей пара. Первое начало термодинамики: $0 = \Delta U_{23} + A_{23}$, и

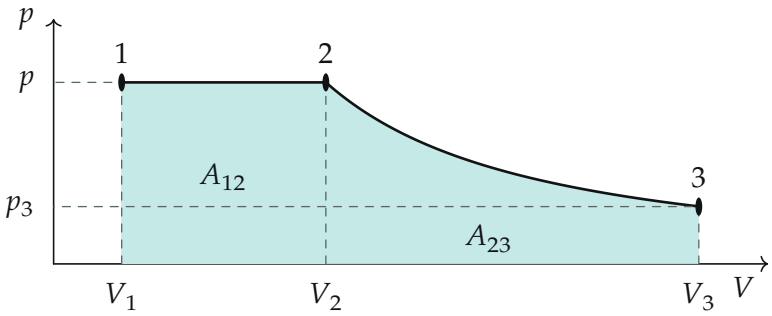
$$A_{23} = -\Delta U_{23} = 2\nu C_V\,(T_2 - T_3) = 6\nu R\,(2T_1 - T_3).$$

Газ совершает положительную работу, охлаждаясь: внутренняя энергия уменьшилась.

5. Равенство работ. По условию $A_{12} = A_{23}$:

$$3\nu RT_1 = 6\nu R\,(2T_1 - T_3) \quad \Rightarrow \quad T_1 = 4T_1 - 2T_3 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2}{3}\,T_3.$$

Тогда $T_3 = \frac{3}{2}T_1 < T_2 = 2T_1$: адиабатное расширение охладило газ, как и должно быть.



pV-диаграмма в масштабе (адиабата $pV^{4/3} = \text{const}$, $C_V = 3R$): площадь прямоугольника под изобарой равна площади под адиабатой, обе $3\nu RT_1$.

6. Теплота на участке 1–2 (две части). Сначала испарение при постоянных T_1 и p: ν молей получают по r,

$$Q_{\text{исп}} = \nu r.$$

Затем изобарное нагревание 2ν молей пара от T_1 до $2T_1$ с $C_p = C_V + R = 4R$:

$$Q_{\text{нагр}} = 2\nu C_p\,(2T_1 - T_1) = 8\nu RT_1.$$

Проверка этой части первым началом: $\Delta U = 2\nu \cdot 3R\,T_1 = 6\nu RT_1$, работа $2\nu RT_1$, сумма $8\nu RT_1$.

7. Итог. Сложим и подставим $T_1 = \frac{2}{3}T_3$:

$$Q_{12} = \nu r + 8\nu RT_1 = \nu\left(r + \frac{16}{3}\,RT_3\right).$$

Знак: $Q_{12} > 0$, система действительно получает теплоту.

Обратите внимание. На участке 1–2 нельзя применять C_p ко всей системе целиком: часть теплоты идёт на превращение жидкости в пар, поэтому два этапа считаем отдельно. Работа испарения νRT_1 уже входит в теплоту парообразования r, при суммировании её второй раз не добавляют.

Проверка. Работа $A_{12} = 3\nu RT_1$ — площадь прямоугольника под изобарой на рисунке; та же площадь под адиабатой (построенной по формуле $pV^{4/3} = \text{const}$ из состояния 2): $A_{23} = \dfrac{p_2V_2 - p_3V_3}{\gamma - 1} = \dfrac{(4-3)\,\nu RT_1}{1/3} = 3\nu RT_1$ при $\gamma = 4/3$ ($p_2V_2 = 2\nu RT_2 = 4\nu RT_1$, $p_3V_3 = 2\nu RT_3 = 3\nu RT_1$) — обе по $3\nu RT_1$, как задумано. Размерность: νr и νRT — джоули. Предел $r \to 0$ даёт один нагрев газа 2ν молей: $Q_{12} = 8\nu RT_1$.

Физический смысл: тепло, полученное системой на изобаре, делится на скрытую теплоту испарения νr и на нагрев пара $8\nu RT_1$, из которых $A_{12} = 3\nu RT_1$ уходит в работу, остальное — во внутреннюю энергию.

Ответ. $Q_{12} = \nu\left(r + \dfrac{16RT_3}{3}\right)$.