Мостик из резисторов

Задача 8. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 8] В схеме, изображённой на рисунке, все резисторы одинаковые и имеют сопротивление R. Найдите сопротивление между точками A и B этой схемы.

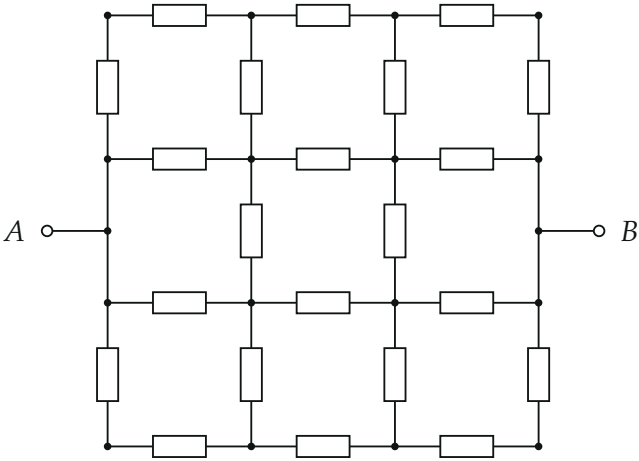
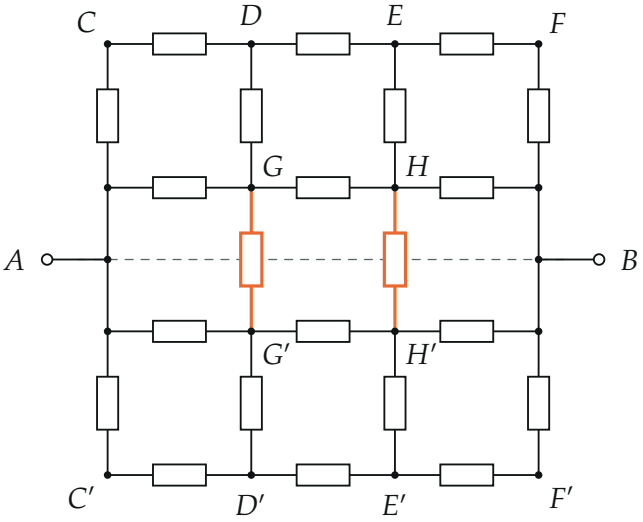


Рисунок условия: все резисторы по R; крайние столбцы между вторым и третьим рядом — провода.

▲ **Решение. Что происходит.** Мостовая схема не сводится к последовательным и параллельным соединениям. Идея: подключить между A и B вспомогательный источник напряжения U, найти ток I через него и взять $R_{AB} = U/I$. Схема симметрична относительно прямой AB, поэтому точки, симметричные относительно неё, имеют одинаковые потенциалы, а резисторы между ними тока не несут. Что останется — половина схемы, две такие половины включены параллельно. Узловые потенциалы половины найдём из закона Ома и сохранения тока в узлах. Класс задачи — сопротивление сложной цепи: симметрия плюс узловые уравнения.

Обозначения. Узлы названы буквами на рисунке ниже: верхний ряд C, D, E, F, нижний C', D', E', F' (штрих — зеркальный образ), средние узлы G, H и G', H'. Потенциалы: $\varphi_A = U$, $\varphi_B = 0$. Токи считаем в единицах $\dfrac{U}{26R}$.



Узлы схемы. Пунктир — ось симметрии AB; морковным выделены два резистора на оси.

1. Симметрия относительно оси AB. Схема переходит в себя при отражении в прямой AB (верх ↔ низ), и источник на A, B лежит на оси. Поэтому потенциалы зеркальных точек одинаковы: $\varphi_C = \varphi_{C'}$, $\varphi_D = \varphi_{D'}$, …, $\varphi_G = \varphi_{G'}$, $\varphi_H = \varphi_{H'}$. Резисторы GG' и HH' соединяют точки равных потенциалов, ток в них равен нулю, и их можно выбросить (рисунок, морковные).

2. Две половины параллельно. Без этих резисторов верхняя и нижняя половины связаны только через A и B и одинаковы. Токи через них равны, поэтому

$$R_{AB} = \frac{R_{\text{п}}}{2},$$

где $R_{\text{п}}$ — сопротивление между A и B верхней половины.

3. Верхняя половина. К узлу C подходят только два резистора (AC и CD), они соединены последовательно: между A и D сопротивление $2R$. Так же узел F: между E и B — $2R$. Получаем «лесенку» (рисунок ниже): верхняя шина $A{-}D{-}E{-}B$ с сопротивлениями $2R$, R, $2R$, нижняя $A{-}G{-}H{-}B$ с R, R, R и две перемычки DG, EH по R. Схема зеркальна относительно вертикали с обменом $A \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow E$, $G \leftrightarrow H$.

4. Вторая симметрия. При обмене $A \leftrightarrow B$ и замене потенциалов $\varphi \to U - \varphi$ схема остаётся той же, значит $\varphi_E = U - \varphi_D$ и $\varphi_H = U - \varphi_G$. Обозначим $\varphi_D = x$, $\varphi_G = y$. Неизвестных двое.

5. Сохранение тока в узлах. В узле нет накопления заряда: сумма втекающих токов равна сумме вытекающих. Ток через резистор — разность потенциалов на его концах, делённая на его сопротивление (закон Ома).

Узел D: втекает ток от A и ток от G по перемычке, вытекает ток к E по верхней шине:

$$\frac{U-x}{2R} + \frac{y-x}{R} = \frac{x-(U-x)}{R} \quad \Rightarrow \quad 7x - 2y = 3U.$$

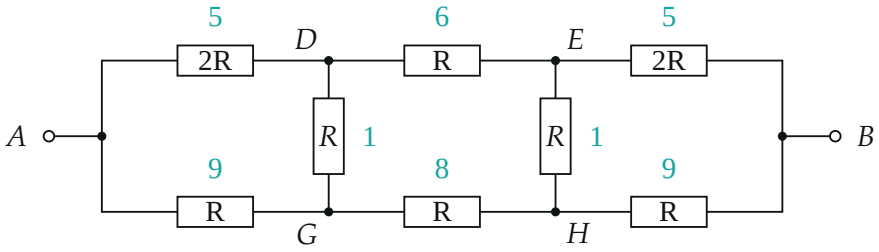
Узел G: втекает ток от A, вытекают ток к D по перемычке и ток к H по нижней шине:

$$\frac{U-y}{R} = \frac{y-x}{R} + \frac{y-(U-y)}{R} \quad \Rightarrow \quad x = 4y - 2U.$$

Подставим вторую формулу в первую: $7(4y - 2U) - 2y = 3U$, откуда $26y = 17U$:

$$y = \varphi_G = \frac{17}{26}U, \qquad x = \varphi_D = \frac{16}{26}U = \frac{8}{13}U,$$

и по симметрии $\varphi_E = \frac{10}{26}U$, $\varphi_H = \frac{9}{26}U$.



Верхняя половина после упрощения. Бирюзовые числа — токи ветвей в единицах $U/(26R)$: слева направо по обеим шинам; в левой перемычке ток идёт от G к D (вверх), в правой — от E к H (вниз).

6. Ток и сопротивление. Ток через источник в верхней половине — сумма токов из A:

$$I_{\text{п}} = \frac{U-x}{2R} + \frac{U-y}{R} = \frac{5U}{26R} + \frac{9U}{26R} = \frac{7U}{13R},$$

$$R_{\text{п}} = \frac{U}{I_{\text{п}}} = \frac{13}{7}R.$$

Сопротивление всей схемы

$$R_{AB} = \frac{R_{\text{п}}}{2} = \frac{13}{14}R \approx 0{,}93\,R.$$

Обратите внимание. Резисторы на оси можно убирать только потому, что ток в них нулевой, а не «потому что они посередине». Потенциалы зеркальных относительно *вертикали* узлов (D и E) не равны, а в сумме дают U: симметрия по вертикали меняет полюса источника, а симметрия по горизонтали — нет.

Проверка. Второй способ — по мощности. В единицах $\dfrac{U^2}{(26)^2R}$ мощность половины $\sum I^2R = 2\cdot5^2+9^2+1^2+6^2+8^2+1^2+9^2+2\cdot5^2 = 364$ (токи с рисунка: на резисторах $2R$ — по два резистора R, в каждом ток 5). На две половины приходится $728\,\dfrac{U^2}{676\,R} = \dfrac{14}{13}\dfrac{U^2}{R}$, а это $\dfrac{U^2}{R_{AB}}$ при $R_{AB} = \dfrac{13}{14}R$ — совпадает. Кроме того, полный расчёт на компьютере всех двенадцати узловых уравнений сетки без упрощений даёт 13/14. Предельная оценка: $R_{AB} < R$ — между A и B много параллельных путей, и сопротивление меньше одного резистора.

Физический смысл: ток от A к B идёт по двум симметричным половинам, перемычек по оси ток не использует, внутри каждой половины большая часть тока идёт по нижней шине.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{13}{14}R$.