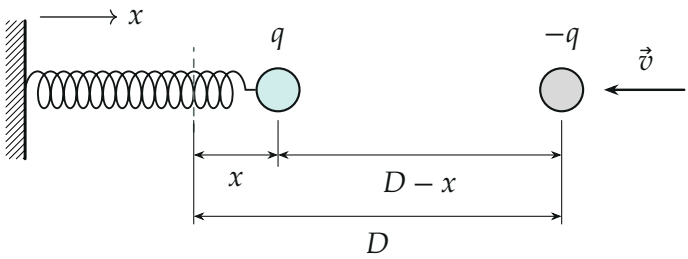
Сближение заряженных шариков

Задача 9. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 9] Небольшой шарик, заряженный зарядом q, покоится на гладком горизонтальном непроводящем столе. К шарику присоединена горизонтальная пружина жёсткостью k, второй конец которой закреплён. Вдоль оси пружины к шарику с большого расстояния очень медленно приближают такой же, но противоположно заряженный шарик. Найдите деформацию пружины в момент столкновения шариков.

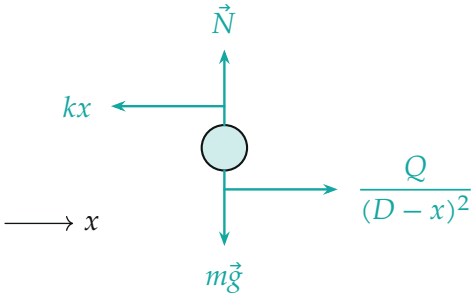


Шарик q на пружине (пунктир — его место при нерастянутой пружине) и приближающийся шарик $-q$. x — удлинение пружины, D — расстояние от нерастянутого положения до второго шарика, $D - x$ — расстояние между шариками.

▲ **Решение. Что происходит.** Второй шарик приближают очень медленно, поэтому в каждый момент шарик на пружине находится в равновесии: сила упругости уравновешена силой притяжения к второму шарику. Пока равновесие есть и оно устойчиво, шарик плавно смещается к второму. Но когда второй шарик подходит достаточно близко, равновесное положение исчезает, и шарик свободно устремляется к нему — шарики сталкиваются. Главная идея: найти расстояние, при котором пропадает равновесие, исследовав уравнение равновесия. Класс задачи — потеря устойчивости: два положения равновесия сближаются и сливаются.

Обозначения. Ось x — вдоль оси пружины в сторону второго шарика; $x = 0$ — положение первого шарика при нерастянутой пружине, x — также удлинение пружины. D — расстояние от точки $x = 0$ до второго

шарика (оно медленно убывает), $D - x$ — расстояние между шариками, $Q = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Шарики малы, считаем их точечными зарядами; стол гладкий, пружина лёгкая.



Силы на шарик q: упругая kx (против оси x), кулоновская притяжения $Q/(D-x)^2$ (по оси), тяжесть и реакция стола уравновешивают друг друга.

1. Сила на шарик. Запишем равнодействующую сил, действующих на шарик с пружиной, в проекции на ось x. Сила тяжести и реакция стола взаимно компенсируются. Пружина растянута на x, сила упругости направлена к стенке: $-kx$. Заряды противоположны, шарики притягиваются, и по закону Кулона сила направлена к второму шарику, на расстоянии $D - x$ от него:

$$F_x = -kx + \frac{Q}{(D-x)^2}.$$

2. Равновесие. Условие $F_x = 0$ даёт

$$x\,(D-x)^2 = \frac{Q}{k}, \qquad \text{то есть} \qquad f(x) = \frac{Q}{k}, \quad f(x) \equiv x\,(D-x)^2.$$

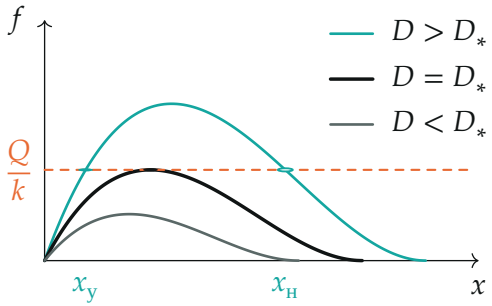
3. Функция $f(x)$. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant D$ функция f неотрицательна, $f(0) = f(D) = 0$. Производная $f' = (D-x)^2 - 2x(D-x) = (D-x)(D-3x)$ обращается в нуль при $x_m = D/3$, и это максимум:

$$f_m = f\left(\frac{D}{3}\right) = \frac{D}{3} \cdot \frac{4D^2}{9} = \frac{4D^3}{27}.$$

4. Корни и устойчивость. Если $\dfrac{Q}{k} < f_m$, уравнение $f(x) = Q/k$ имеет на $(0, D)$ два корня: $x_у < \dfrac{D}{3} < x_н$. Равнодействующая записывается как

$$F_x = \frac{k}{(D-x)^2}\Big(\frac{Q}{k} - f(x)\Big),$$

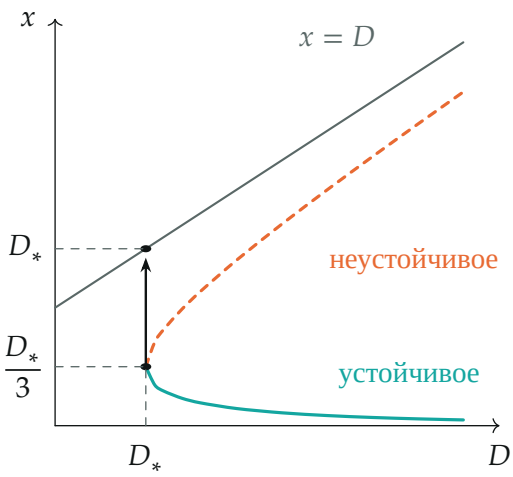
и её знак совпадает со знаком $\dfrac{Q}{k} - f(x)$. Левее меньшего корня $f < Q/k$ и $F_x > 0$ (шарик тянет вправо, к корню), между корнями $f > Q/k$ и $F_x < 0$ (тянет влево, снова к меньшему корню), правее большего корня $F_x > 0$ (тянет вправо, от корня). Значит, меньший корень $x_у$ устойчив: смещение от него вызывает возвращающую силу; больший корень $x_н$ неустойчив. Если $\dfrac{Q}{k} > f_m$, корней нет и $F_x > 0$ при всех x.



Графики $f(x) = x(D-x)^2$ при трёх значениях D (масштаб схематичный): при $D > D_*$ уровень Q/k пересекают два корня (бирюзовая кривая; меньший $x_у$ — устойчивый, больший $x_н$ — неустойчивый), при $D = D_*$ корни слились в вершине (чёрная кривая), при $D < D_*$ корней нет (серая).

5. Медленное приближение. Уровень Q/k задан зарядом и пружиной, D убывает, и $f_m = 4D^3/27$ убывает вместе с ним: кривая $f(x)$ опускается, пересечения с уровнем Q/k сдвигаются к вершине, а два корня $x_у$ и $x_н$ сближаются. Пока $f_m > Q/k$, шарик плавно следует за устойчивым корнем. В момент $f_m = Q/k$ корни сливаются в точке $x_m = D/3$, при дальнейшем уменьшении D равновесия нет: равнодействующая на-

правлена к второму шарику при любом x, и шарик устремляется к нему — равновесие потеряно.



Положения равновесия $x(D)$ при $Q/k = 4$ (единицы: $D_* = 3$). Бирюзовая ветвь — устойчивое равновесие, шарик на пружине идёт по ней справа налево, пока D убывает; морковная пунктирная — неустойчивое. При $D = D_*$ ветви сливаются в точке $x = D_*/3$, дальше равновесия нет, и шарик перескакивает на прямую $x = D$ — шарики столкнулись.

6. Момент потери устойчивости. Приравняем $f_m = Q/k$:

$$\frac{4D_*^3}{27} = \frac{Q}{k} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 k} \quad\Rightarrow\quad D_*^3 = \frac{27\,q^2}{16\pi\varepsilon_0 k} \quad\Rightarrow\quad D_* = \frac{3}{2}\left(\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 k}\right)^{1/3}.$$

Здесь $\dfrac{27}{16} = \dfrac{27}{8}\cdot\dfrac{1}{2}$, а $\dfrac{27}{8} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$, откуда множитель $\dfrac{3}{2}$ и знаменатель $2\pi\varepsilon_0 k$.

7. Столкновение. После потери устойчивости шарик на пружине движется к второму быстро, а второй шарик за это время почти не смещается: его приближают очень медленно. Шарики сталкиваются, когда расстояние между ними $D-x$ обращается в нуль, то есть $x = D_*$: удлинение

пружины в момент столкновения равно положению второго шарика:

$$l = D_* = \frac{3}{2}\left(\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 k}\right)^{1/3}.$$

Обратите внимание. Удлинение в момент потери устойчивости — это $D_*/3$, втрое меньше ответа. Спрашивается про удлинение при *столкновении*, когда шарик успел пролететь оставшийся путь до второго шарика. Равновесия при $D < D_*$ нет вообще, поэтому сближение с бесконечно малой скоростью не может быть «продолжено вдоль равновесия».

Проверка. Вторым способом — через потенциальную энергию шарика на пружине $W(x) = \dfrac{kx^2}{2} - \dfrac{Q}{D-x}$. Равновесие: $W' = kx - \dfrac{Q}{(D-x)^2} = 0$, потеря устойчивости: $W'' = k - \dfrac{2Q}{(D-x)^3} = 0$. Из первого $Q = kx(D-x)^2$, подставим во второе: $k = \dfrac{2kx}{D-x}$, откуда $D - x = 2x$ и $x = D/3$ — то же, а тогда $Q = k \cdot \dfrac{D}{3} \cdot \dfrac{4D^2}{9} = \dfrac{4kD^3}{27}$. Размерность: $q^2/(\varepsilon_0 k)$ — $\dfrac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot(\text{Н/м})} = \text{м}^3$, под кубическим корнем получается длина. Пределы: $k \to \infty$ (жёсткая пружина) — $l \to 0$; $q \to 0$ — $l \to 0$.

Физический смысл: на уровне вершины кривой f пружина уже не может удержать шарик, потому что кулоновская сила растёт с сближением быстрее, чем сила упругости.

Ответ. $l = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 k}\right)^{1/3}$.