Диод, катушка и конденсатор

Задача 10. [МОШ 2013/14, 11 класс, задача 10] В цепи, схема которой изображена на рисунке, катушка имеет индуктивность L, ёмкость конденсатора равна C, сопротивление источника, активное сопротивление катушки и сопротивления проводов пренебрежимо малы. Вольтамперная характеристика диода D изображена на графике (I_D — сила текущего через диод тока; $U_D = \varphi_b - \varphi_a$, где φ_a и φ_b — потенциалы соответствующих точек цепи). В начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор C не заряжен. Ключ K замыкают на время $t_0 < \sqrt{LC}$, а затем снова размыкают. Определите отношение ЭДС источника $\mathcal{E}$ к напряжению U_0, при котором открывается диод, если заряд, прошедший через диод после размыкания ключа, в n раз больше заряда, прошедшего через катушку за время t_0, пока ключ был замкнут.

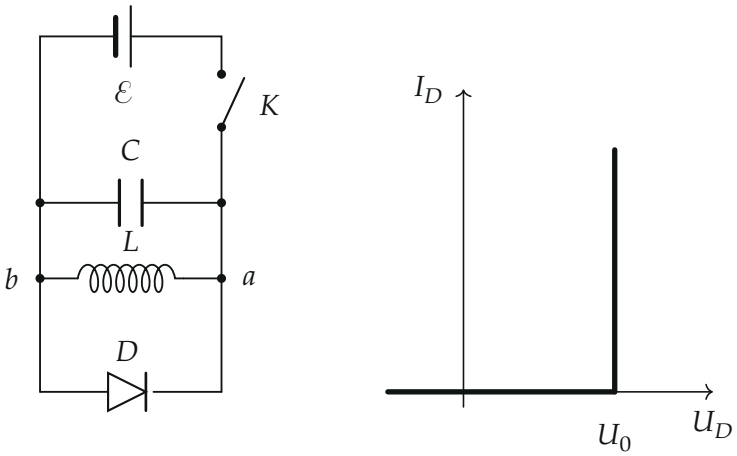


Рисунок условия: схема и вольтамперная характеристика диода. При $U_D < U_0$ диод закрыт (ток нулевой), при $U_D = U_0$ он открыт и пропускает любой ток; $U_D > U_0$ невозможно.

▲ **Решение. Что происходит.** Диод идеальный: пока $U_D < U_0$, тока через него нет, а когда напряжение на нём достигает U_0, он открывается и держит это напряжение. Поэтому задача решается перебором состояний диода: закрыт → открыт → снова закрыт. Четыре этапа. 1) Ключ

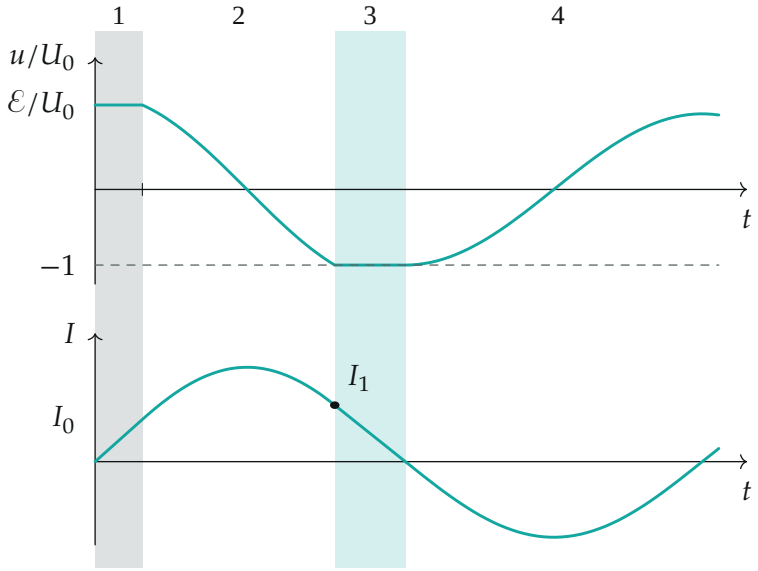
замкнут: конденсатор сразу заряжается до $\mathcal{E}$, катушка находится под постоянным напряжением $\mathcal{E}$, ток в ней растёт линейно. 2) Ключ разомкнут, диод закрыт: контур LC колеблется, конденсатор разряжается и перезаряжается. 3) Напряжение достигает $-U_0$ на конденсаторе, то есть $U_D = U_0$: диод открывается, напряжение на контуре закреплено, ток катушки линейно спадает до нуля, весь он идёт через диод. 4) Ток обратился в нуль, диод закрывается и больше не открывается. Ключевой шаг — энергия контура в момент открытия диода.

Обозначения. $u = \varphi_a - \varphi_b$ — напряжение на конденсаторе и на катушке, I — ток катушки от a к b (справа налево на рисунке), $\omega = 1/\sqrt{LC}$, τ — время от размыкания ключа. Напряжение на диоде $U_D = \varphi_b - \varphi_a = -u$. Полярность источника такова, что при замкнутом ключе $u = +\mathcal{E}$ (положительная пластина батареи — к ключу).

1. Ключ замкнут, $0 \leqslant t \leqslant t_0$**.** Источник и провода без сопротивления: конденсатор заряжается мгновенно до $\mathcal{E}$, значит $u = \mathcal{E}$. Диод закрыт: $U_D = -\mathcal{E} < U_0$. Закон Ома для катушки без сопротивления: $u = L\dfrac{dI}{dt} = \mathcal{E}$, ток растёт линейно, $I = \dfrac{\mathcal{E}}{L}\,t$. К размыканию

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}\,t_0}{L}, \qquad q_0 = \int_0^{t_0} I\,dt = \frac{\mathcal{E}\,t_0^2}{2L}$$

(заряд через катушку — площадь под графиком $I(t)$, треугольник).



Напряжение на конденсаторе и ток катушки в пересчёте на безразмерные числа: $LC = 1$, $t_0 = 0{,}5$, $n = 2$, $U_0 = 1$, $\mathcal{E} = 1{,}117$ (численное интегрирование). Серая полоса — этап 1, бирюзовая — этап 3, когда диод открыт ($u = -U_0$, ток спадает линейно). Цифры — номера этапов.

2. Ключ разомкнут, диод закрыт. Конденсатор и катушка образуют контур. Для катушки $L\dfrac{dI}{dt} = u$, а ток катушки разряжает конденсатор: $C\dfrac{du}{dt} = -I$. Отсюда колебания с частотой ω; с начальными условиями $u(0) = \mathcal{E}$, $I(0) = I_0$:

$$u = \mathcal{E}\,(\cos\omega\tau - \omega t_0 \sin\omega\tau), \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{L}\Big(t_0\cos\omega\tau + \frac{\sin\omega\tau}{\omega}\Big).$$

Пока диод закрыт, энергия контура сохраняется (источник отключён, потерь нет): $\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}Cu^2 = \text{const}$. Напряжение u убывает, меняет знак, и диод открывается в тот момент, когда $U_D = -u = U_0$, то есть $u = -U_0$. К этому моменту u ещё убывает, значит ток катушки $I_1 > 0$. Закон со-

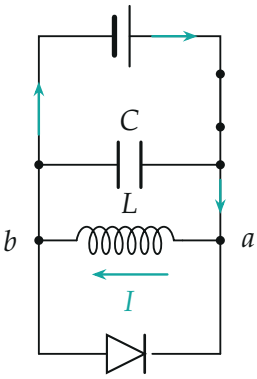
хранения энергии между размыканием и открытием диода:

$$\frac{LI_0^2}{2}+\frac{C\mathcal{E}^2}{2}=\frac{LI_1^2}{2}+\frac{CU_0^2}{2}\quad\Rightarrow\quad LI_1^2=C\,(\mathcal{E}^2-U_0^2)+\frac{\mathcal{E}^2t_0^2}{L}.$$

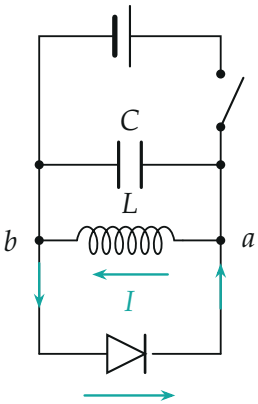
3. Диод открыт. Пока диод открыт, напряжение на нём равно U_0 по характеристике, значит $u = -U_0$ постоянно: ток конденсатора $C\,du/dt = 0$, а весь ток катушки замыкается через диод ($I_D = I$). Для катушки $L\dfrac{dI}{dt} = u = -U_0$: ток убывает линейно, пока не станет нулём. Диод пропускает ток только в прямом направлении, поэтому в нуле он закрывается и ток катушки не меняет знак. Продолжительность $t_1 = \dfrac{LI_1}{U_0}$, заряд через диод — площадь треугольника под $I(t)$:

$$q_1=\frac{I_1t_1}{2}=\frac{LI_1^2}{2U_0}=\frac{C\,(\mathcal{E}^2-U_0^2)+\mathcal{E}^2t_0^2/L}{2U_0}.$$

1. ключ замкнут



3. диод открыт



Токи на этапах 1 и 3. Этап 1: ток идёт от источника через ключ и катушку, диод и конденсатор тока не пропускают. Этап 3: ключ разомкнут, ток катушки идёт по замкнутому контуру катушка — диод.

4. Диод больше не откроется. После этапа 3 в контуре $u = -U_0$, $I = 0$, и LC-контур колеблется с амплитудой напряжения U_0: $u =$

$-U_0 \cos \omega s$, где s — время от закрытия диода. Тогда $U_D = -u \leqslant U_0$: порог U_0 достигается лишь в точках, где $I = 0$ (там $|u|$ наибольшее), диод в них только касается порога и тока не пропускает. Значит, заряд, прошедший через диод после размыкания ключа, равен q_1.

5. Уравнение для $\mathcal{E}/U_0$. По условию $q_1 = nq_0$:

$$\frac{C\,(\mathcal{E}^2 - U_0^2) + \mathcal{E}^2 t_0^2/L}{2U_0} = n\,\frac{\mathcal{E} t_0^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad LC\,(\mathcal{E}^2 - U_0^2) + \mathcal{E}^2 t_0^2 = n\,t_0^2\,\mathcal{E}\,U_0.$$

Обозначим $x = \mathcal{E}/U_0$ и разделим на U_0^2:

$$(LC + t_0^2)\,x^2 - nt_0^2\,x - LC = 0.$$

Положительный корень этого квадратного уравнения ($x > 0$, так как $\mathcal{E} > 0$):

$$x = \frac{\mathcal{E}}{U_0} = \frac{nt_0^2 + \sqrt{n^2 t_0^4 + 4LC\,(LC + t_0^2)}}{2\,(LC + t_0^2)}.$$

Обратите внимание. Диод открывается не при замкнутом ключе: при замыкании $U_D = -\mathcal{E} < 0$, и он закрыт. Напряжение U_0 достигается позже, при перезарядке конденсатора. Заряд через диод считается только на этапе 3: на этапе 2 ток катушки идёт через конденсатор. Условие $t_0 < \sqrt{LC}$ означает $\omega t_0 < 1$, ключ замкнут малую часть периода колебаний контура.

Проверка. Численно: при $LC = 1$, $t_0 = 0{,}5$ и $n = 2$ формула даёт $\mathcal{E}/U_0 = 1{,}1165$. Интегрирование уравнений цепи при $U_0 = 1$, $\mathcal{E} = 1{,}1165$ даёт $I_1 = 0{,}7472$ и $q_1 = 0{,}2791$ (площадь треугольника), $q_0 = \mathcal{E} t_0^2/(2L) = 0{,}1396$, откуда $q_1/q_0 = 2{,}000$. Размерность: LC и t_0^2 — с^2, $\mathcal{E}/U_0$ безразмерно. Предельный случай $n = 0$ (диод едва открылся, $I_1 = 0$): $x^2 = \dfrac{LC}{LC + t_0^2} < 1$ — диод может открыться и при $\mathcal{E} < U_0$ за счёт энергии катушки.

Ответ. $\dfrac{\mathcal{E}}{U_0} = \dfrac{nt_0^2 + \sqrt{n^2 t_0^4 + 4LC\,(LC + t_0^2)}}{2\,(LC + t_0^2)}$.