Бочка, дождь и насос

Задача 3. [МОШ 2013/14, 7 класс, задача 3] Дед Макар, наблюдая за тем, как бочка постоянного сечения наполняется водой во время дождя, занёс в таблицу зависимость уровня h воды в бочке от времени t. В тот момент, когда дождь закончился, уровень воды в бочке составил 80 см. Изучая затем таблицу, дед вспомнил, что в момент времени $t_1 = 9$ мин он включил насос, лежащий в бочке, который с постоянной скоростью откачивал воду.

h, см	t, мин
0	0
10	2,25
40	9
60	18
80	27

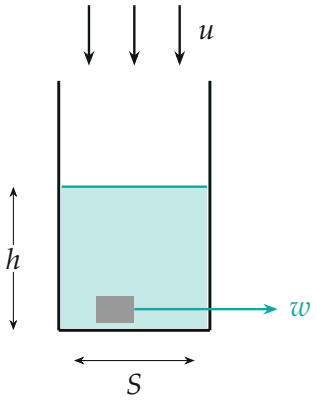
Помогите ему проанализировать эти данные, а именно, определите:

1. время t после окончания дождя, за которое уровень воды опустится за счёт дальнейшей работы насоса с высоты 80 см до высоты 40 см;
2. объём воды V, который находился в бочке в момент времени $t_2 = 4{,}5$ мин, если площадь сечения бочки $S = 5400$ см^2;
3. объём q дождевой воды, которая попадала в бочку за одну минуту.

▲ **Решение. Что происходит.** Бочка с вертикальными стенками: объём воды в ней $V = Sh$, поэтому всё, что происходит с объёмом, видно по уровню h. До 9-й минуты в бочку только льёт дождь, потом к дождю добавляется насос, который воду забирает. Значит, у уровня две скорости изменения: до насоса и после. Класс задачи: заполнение сосуда с притоком и оттоком, скорости уровня постоянны на каждом участке и находятся по таблице. Сначала разберёмся со скоростями, потом ответим на три вопроса.

Обозначения. u — скорость подъёма уровня только от дождя; w — скорость, с которой насос понижает уровень (одинакова всё время работы насоса: он откачивает воду «с постоянной скоростью»); S — площадь

дна. Дождь идёт с одной и той же интенсивностью: сейчас докажем, что это согласуется с таблицей.



Бочка с вертикальными стенками: сверху дождь (скорость подъёма уровня u), у дна насос (понижение w), h — уровень, S — площадь дна

1. Скорость подъёма уровня до насоса. За первые 2,25 мин уровень поднялся на 10 см, за первые 9 мин — на 40 см. Скорость подъёма

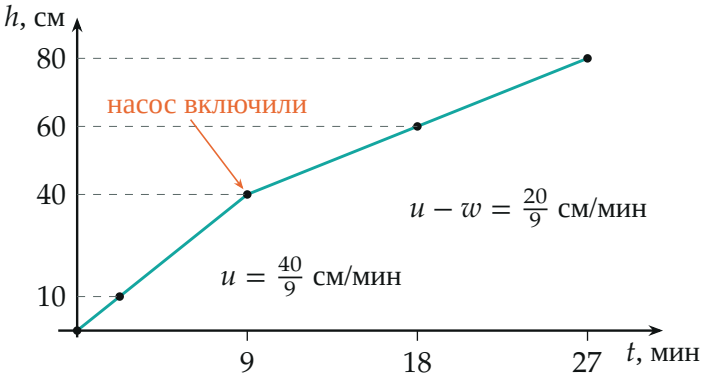
$$u = \frac{10\text{ см}}{2{,}25\text{ мин}} = \frac{40\text{ см}}{9\text{ мин}} = \frac{40}{9}\,\frac{\text{см}}{\text{мин}} \approx 4{,}4\,\frac{\text{см}}{\text{мин}}.$$

Обе пары значений дают одно и то же число, значит, до насоса уровень растёт равномерно, и интенсивность дождя постоянна.

2. Скорость подъёма уровня с насосом. С $t_1 = 9$ мин до 18 мин уровень поднялся с 40 до 60 см, с 18 до 27 мин — с 60 до 80 см:

$$u - w = \frac{20\text{ см}}{9\text{ мин}} = \frac{20}{9}\,\frac{\text{см}}{\text{мин}} \approx 2{,}2\,\frac{\text{см}}{\text{мин}}.$$

Обе пары снова равны: подъём всё ещё равномерный. **Обратите внимание.** Насос не останавливает дождь: приток и отток действуют одновременно, и скорости уровня складываются со знаками, поэтому подъём стал $u - w$, а не w.



Данные таблицы: на каждом из двух участков точки лежат на одной прямой; излом — в момент $t_1 = 9$ мин

3. Скорость насоса. Из пунктов 1 и 2:

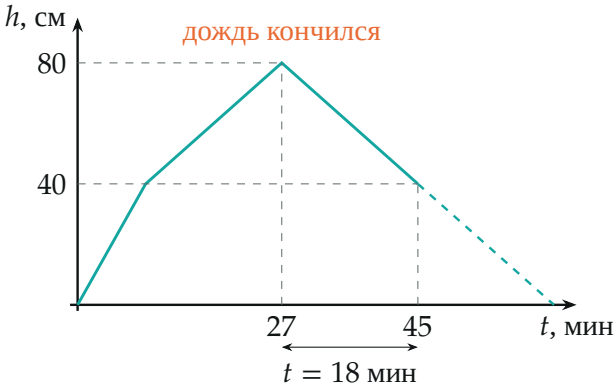
$$w = u - (u - w) = \frac{40}{9} - \frac{20}{9} = \frac{20}{9}\ \frac{\text{см}}{\text{мин}}.$$

Интересно, что $w = u/2$: насос откачивает ровно вдвое медленнее, чем льёт дождь, поэтому подъём после включения вдвое медленнее.

Вопрос 1. Спад после дождя. Когда дождь кончился ($t = 27$ мин), остаётся один насос, и уровень падает со скоростью w. Спуститься с 80 см до 40 см — это 40 см:

$$t = \frac{80 - 40}{w} = \frac{40\text{ см}}{\frac{20}{9}\text{ см/мин}} = 18\text{ мин}.$$

Второй способ. С 9 по 27 минуту, то есть 18 мин, насос работал вместе с дождём, и уровень поднялся с 40 до 80 см, на 40 см. За эти 18 мин дождь один добавил бы $u \cdot 18 = 80$ см, значит, насос убрал $80 - 40 = 40$ см. Столько же, 40 см, насосу нужно убрать, чтобы опустить уровень с 80 до 40 см, и он делает это за те же 18 мин.



После окончания дождя уровень падает с 80 до 40 см по прямой со скоростью w; пунктир — продолжение до пустой бочки

Вопрос 2. Объём воды при $t_2 = 4{,}5$ мин. До 9 мин работает только дождь, уровень растёт равномерно: $h(t) = ut$. Тогда

$$h_2 = u\,t_2 = \frac{40}{9}\,\frac{\text{см}}{\text{мин}} \cdot 4{,}5\ \text{мин} = 20\ \text{см}.$$

Здесь можно проверить по таблице: при $t = 9$ мин уровень был 40 см, при вдвое меньшем $t_2 = 4{,}5$ мин — вдвое меньше. Объём воды в бочке постоянного сечения $V = S\,h$ (площадь дна, умноженная на высоту):

$$V = S\,h_2 = 5400\ \text{см}^2 \cdot 20\ \text{см} = 108\,000\ \text{см}^3 = 108\ \text{л}.$$

Вопрос 3. Дождь за минуту. Пока насоса нет, в бочку попадает только дождевая вода, и каждую минуту уровень растёт на u:

$$q = S\,u = 5400\ \text{см}^2 \cdot \frac{40}{9}\,\frac{\text{см}}{\text{мин}} = 24\,000\,\frac{\text{см}^3}{\text{мин}} = 24\,\frac{\text{л}}{\text{мин}}.$$

Проверка. Размерность: $\text{см}^2 \cdot \text{см/мин} = \text{см}^3/\text{мин}$. Баланс объёма с насосом: $q - Sw = 24 - 12 = 12$ л/мин, и 12 л/мин$/S = \frac{12\,000}{5400} = \frac{20}{9}$ см/мин — то же, что получили из таблицы. Смысл: дождь вдвое сильнее насоса, поэтому с насосом уровень растёт вдвое медленнее.

Ответ. 1) 18 мин; 2) 108 л; 3) 24 л/мин.