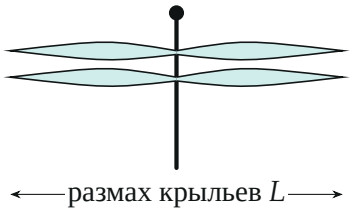
Размер стрекозы и кислород

Задача 5. [МОШ 2013/14, 7 класс, задача 5] Есть гипотеза, согласно которой размеры насекомых ограничены тем, что они потребляют воздух трахеальными трубками, выходящими на поверхность тела (то есть их воздухозабор пропорционален площади поверхности тела). Расход же кислорода, в свою очередь, пропорционален массе тела. Таким образом, можно прийти к выводу, что при увеличении насекомого в длину, высоту и ширину в одинаковое число раз, можно добиться того, что оно начнет «задыхаться» от недостатка кислорода.

Известно, что в карбоновом (каменноугольном) геологическом периоде размах крыльев стрекозы меганевры достигал 65 см. По предположениям ученых, это было возможно потому, что концентрация кислорода в атмосфере тогда составляла 35%, а не 21%, как сейчас (при той же плотности воздуха). Считая, что для времен карбона это был максимально возможный размер, оцените максимально возможный размах крыльев современной стрекозы. Сейчас стрекозы имеют примерно ту же плотность и пропорции тела, что и стрекоза периода карбона, и требуют на единицу массы не меньшее количество кислорода.

Примечание: ответ будет несколько превышать реальные размеры современных стрекоз из-за наличия других факторов, ограничивающих размер стрекозы (например, конкуренция с птицами).



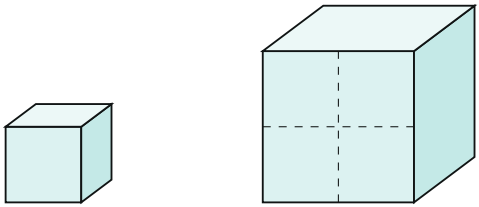
Поясняющий рисунок: размах крыльев L как характерный размер насекомого

▲ **Решение. Что происходит.** Если увеличить насекомое в k раз во всех направлениях, его поверхность вырастет как k^2, а масса — как k^3. Воздух поступает через поверхность, а расходуется пропорционально мас-

се, поэтому у большого насекомого на единицу массы приходится меньше кислорода: оно «задыхается». Чем больше кислорода в воздухе, тем больше размер, при котором ещё хватает. Класс задачи: оценка по подобию (масштабирование); нужно выяснить, как предельный размер зависит от концентрации кислорода, и применить это к двум эпохам.

Обозначения. L — линейный размер (размах крыльев), c — концентрация кислорода в воздухе, A — поступление кислорода в единицу времени, Q — расход кислорода, ρ — плотность тела, m — масса, Σ — площадь поверхности. Индекс «0» — карбон ($c_0 = 35\%$, $L_0 = 65$ см), без индекса — наше время ($c = 21\%$).

1. Как растут площадь и объём. При увеличении всех размеров в k раз площадь поверхности растёт в k^2 раз, объём — в k^3 раз (закон подобия).



Увеличение размера вдвое: поверхность вырастает вчетверо (четыре квадрата вместо одного на каждой грани), объём — в восемь раз (восемь кубиков)

2. Поступление и расход кислорода. Воздухозабор пропорционален площади поверхности и концентрации кислорода (воздух той же плотности, значит, в каждой порции воздуха кислорода пропорционально c): $A \sim c\Sigma \sim cL^2$. Расход пропорционален массе, а масса при одной плотности — объёму: $Q \sim m = \rho V \sim L^3$. Отношение поступления к расходу:

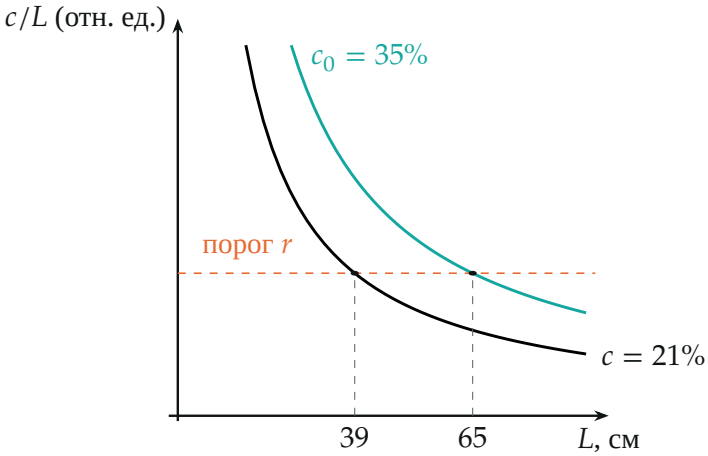
$$\frac{A}{Q} \sim \frac{cL^2}{L^3} = \frac{c}{L}.$$

Это и есть «запас» дыхания: чем он больше, тем свободнее насекомому.

3. Условие предельного размера. Насекомое не задохнётся, пока A/Q не меньше некоторого значения r: по условию современные стрекозы требуют на единицу массы не меньше кислорода, чем стрекоза карбона, и пропорции с плотностью те же, значит, r у них тот же. На пределе $A/Q = r$ с одной и той же константой пропорциональности:

$$\frac{c_0}{L_0} = \frac{c}{L} \quad \Rightarrow \quad L = L_0 \frac{c}{c_0}.$$

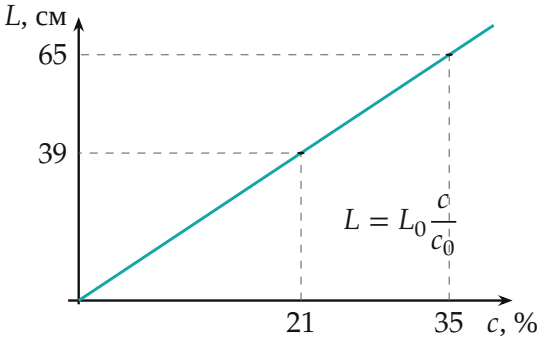
Предельный размер прямо пропорционален концентрации кислорода.



Запас дыхания c/L убывает с размером; он падает до порога r у карбоновой стрекозы при $L_0 = 65$ см, а у современной — при меньшем размере 39 см

4. Численный ответ.

$$L = 65\text{ см} \cdot \frac{21\%}{35\%} = 65\text{ см} \cdot 0{,}6 = 39\text{ см}.$$



Предельный размер пропорционален концентрации кислорода: прямая через начало координат и две точки — карбон и современность

Обратите внимание. Сам коэффициент пропорциональности и пороговое значение r знать не нужно: они одинаковы для обеих эпох и сокращаются в отношении. Именно поэтому в условии подчёркнуто, что плотность и пропорции тела те же, а потребность на единицу массы не меньше.

Проверка. Размерность: c/c_0 безразмерно, ответ в сантиметрах. Предел: при $c = c_0$ получаем $L = L_0$. Второй способ: при том же пороге поступление $\sim cL^2$ должно равняться $r \cdot m \sim rL^3$, откуда $L \sim c$ — тот же вывод; по массе $m \sim L^3 \sim c^3$, то есть масса современной стрекозы около $0{,}6^3 \approx 0{,}22$ от карбоновой. Смысл: чем меньше кислорода в воздухе, тем меньше насекомое; при сегодняшних 21% оценка даёт 39 см — больше реальных стрекоз, что и сказано в примечании (мешают птицы и другие факторы).

Ответ. $L = L_0\, c/c_0 \approx 39$ см.