Колонна автомобилей при разгоне

Задача 1. [МОШ 2013/14, 8 класс, задача 1] Перед светофором остановилась колонна из $n = 10$ одинаковых автомобилей, расположенных друг за другом. Длина каждого автомобиля равна $L = 4{,}5$ м, а расстояние между соседними автомобилями равно $S = 1$ м. После включения зелёного сигнала светофора первый автомобиль плавно разгоняется до скорости $V = 54$ км/ч и продолжает ехать с этой скоростью. Водитель второго автомобиля начинает повторять действия водителя первого спустя время $t = 1{,}6$ с после того, как первый водитель тронулся с места. Водитель каждого следующего автомобиля повторяет действия водителя предыдущего спустя такой же интервал времени.

Какой станет длина l колонны, когда все автомобили будут двигаться с постоянной скоростью?

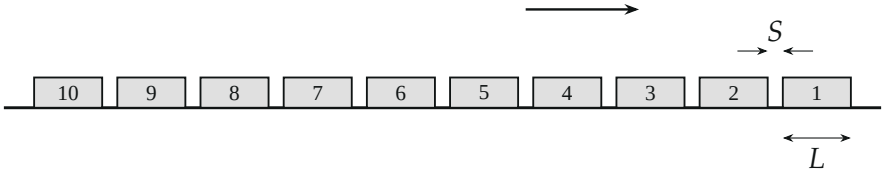


Рис. 1. Колонна у светофора до старта (в масштабе); машины поедут вправо, первая — правая

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый следующий водитель повторяет движение предыдущего с опозданием t. Когда первая машина уже едет с постоянной скоростью V, вторая делает то же самое на время t позже и поэтому отстаёт от первой на лишние Vt. То же верно для каждой пары соседних машин, значит, промежуток между машинами вырастает на Vt. Ключевые законы: путь при равномерном движении $s = Vt$ и устройство длины колонны: машины плюс промежутки.

Обозначения. $s_k(\tau)$ — путь, пройденный k-й машиной с момента, когда тронулся первый водитель (τ — время от этого момента); $V = 54$ км/ч $= 15$ м/с.

1. Движение каждой машины — то же, что у первой, но позже. k-й водитель начинает на время $(k-1)t$ позже первого и повторяет его

действия, поэтому

$$s_k(\tau) = s_1(\tau - (k-1)t).$$

На рис. 2 графики s_1, s_2, s_3 — одна и та же кривая, сдвинутая вправо по оси времени на t и на $2t$. Как именно разгонялся первый автомобиль, не важно: нужно только, что потом он едет с V.

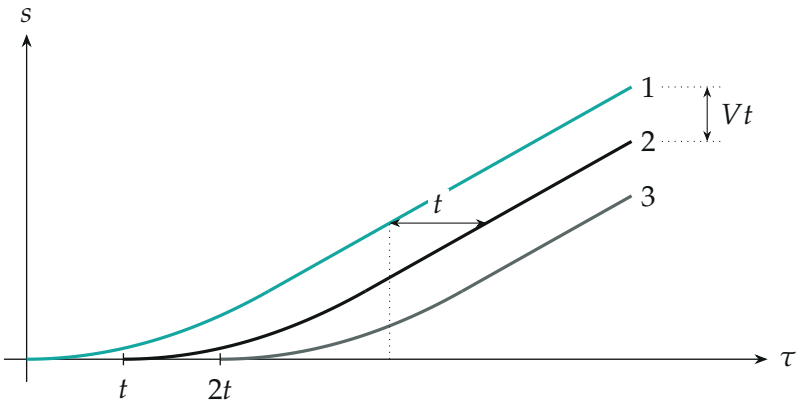


Рис. 2. Путь первых трёх машин: каждая следующая — та же кривая, сдвинутая на t вправо; после разгона кривые идут параллельно, и по вертикали между ними всегда Vt

2. Что происходит после разгона. Пусть первая машина разогналась и дальше едет с V: $s_1(\tau) = V\tau - d$, где постоянная d запоминает, чем разгон отличался от мгновенного старта. Когда вслед за ней разогнались и остальные машины, для любой пары соседних (из п. 1)

$$s_{k-1}(\tau) - s_k(\tau) = (V(\tau - (k-2)t) - d) - (V(\tau - (k-1)t) - d) = Vt.$$

Величина d сократилась: поэтому и не нужно знать, как разгонялся автомобиль. Предыдущая машина проехала на Vt больше следующей, а промежуток между ними — расстояние от задней кромки передней машины до передней кромки следующей — вырос на ту же Vt (рис. 2, вертикаль):

$$S_{\text{нов}} = S + Vt = 1\text{ м} + 15\ \tfrac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1{,}6\text{ с} = 1\text{ м} + 24\text{ м} = 25\text{ м}.$$

3. Длина колонны. Колонна — от передней кромки первой машины до задней кромки последней — состоит из n длин машин и $n-1$ промежутков между ними (рис. 3):

$$l = nL + (n-1)(S+Vt) = 10 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot 25 = 45 + 225 = 270 \text{ м}.$$

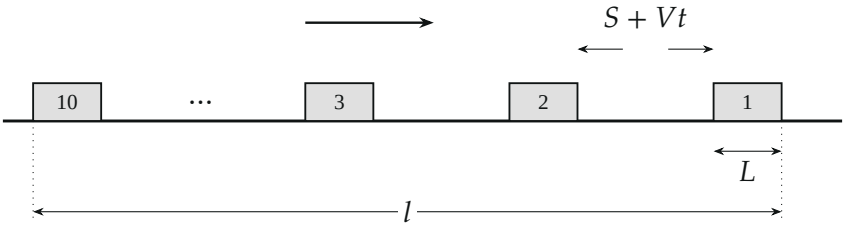


Рис. 3. Колонна после разгона (не в масштабе): между машинами $S + Vt = 25$ м, длина колонны l — от переда первой до зада последней

Обратите внимание.

- Скорость переводим в м/с: 54 км/ч = 15 м/с, иначе Vt получится в неверных единицах.
- Промежутков на один меньше, чем машин: $n - 1 = 9$, а не 10.
- Время t — задержка старта соседних водителей, а не время разгона. Время разгона в ответ не входит.

Проверка. Размерность: nL и $(n-1)(S+Vt)$ — длины. Предел $t \to 0$: все машины трогаются сразу, колонна остаётся такой же, как у светофора, $l = nL + (n-1)S = 45 + 9 = 54$ м (рис. 1). Второй способ: расстояние между передними кромками соседних машин было $L + S = 5{,}5$ м, стало $5{,}5 + 24 = 29{,}5$ м; от передней кромки первой до передней кромки последней $9 \cdot 29{,}5 = 265{,}5$ м, плюс длина последней машины 4,5 м, итого 270 м. Смысл: колонна растягивается ровно на столько, на сколько машина успевает уехать за время задержки следующего водителя.

Ответ. $l = nL + (n-1)(S+Vt) = 270$ м.