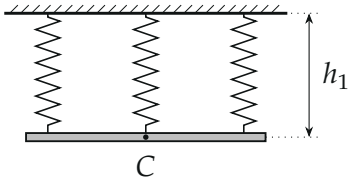
Диск на пружинках

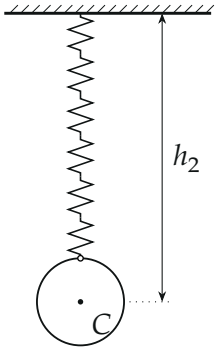
Задача 2. [МОШ 2013/14, 8 класс, задача 2] На лабораторной работе по физике ученице Агнессе выдали шесть одинаковых легких пружинок длиной 5 см каждая и твердый диск радиусом 10 см, вдоль периферии которого располагались 36 отверстий, находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга. Используя пружинки, диск можно было подвесить в горизонтальном положении, прикрепив другие концы вертикальных пружинок к горизонтальной платформе, находящейся на некоторой высоте от поверхности стола.

Когда Агнесса закрепила диск в горизонтальном положении с помощью некоторого количества пружинок, расположенных одним ярусом, то каждая из использованных ею пружинок растянулась на 1 см. Затем она соединила все имеющиеся у нее пружинки одну за другой, верхний конец системы пружинок прикрепила к платформе, а к нижнему концу подвесила диск за одно из отверстий. В этом случае положение центра диска по вертикали относительно первого случая крепления изменилось на 58 см.

На каком количестве пружинок Агнесса уравновесила диск в горизонтальном положении? Считать, что удлинение всех пружинок пропорционально растягивающим их силам, то есть для них справедлив закон Гука.



1-й случай:
n пружин параллельно



2-й случай:
цепочка из 6 пружин

Рис. 1. Поясняющий рисунок (не в масштабе, вид сбоку): диск на n параллельных пружинках (показаны три) и диск на цепочке из шести пружинок, подвешенный за отверстие; C — центр диска, h_1 и h_2 — его расстояния до платформы

▲ **Решение. Что происходит.** Вес диска в обоих случаях один и тот же. В первом случае он делится между n параллельными пружинками, и каждая несёт долю mg/n. Во втором все шесть пружинок включены последовательно, и через каждую из них передаётся весь вес mg, поэтому каждая растянута в n раз сильнее, чем раньше, а вся цепочка — в $6n$ раз. Ключевые законы: закон Гука для пружинки и условие равновесия диска (сумма сил равна нулю).

Обозначения. m — масса диска, k — жёсткость одной пружинки, $l_0 = 5$ см — её длина без растяжения, $R = 10$ см — радиус диска, $x_1 = 1$ см — удлинение пружинки в первом случае, x_2 — удлинение всей цепочки во втором, h_1 и h_2 — расстояния от платформы до центра диска C в первом и втором случае.

1. Первый случай: диск на n параллельных пружинках. Диск висит горизонтально, значит, все n пружинок растянуты одинаково (рис. 2). Равновесие диска в проекции на вертикаль: сила тяжести mg направлена вниз, n сил упругости, каждая $F_1 = kx_1$ по закону Гука, — вверх:

$$nkx_1 = mg.$$

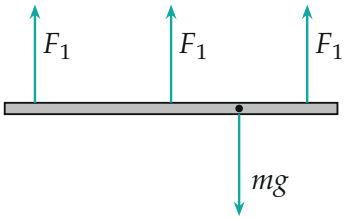


Рис. 2. Силы на диск в первом случае: n одинаковых сил упругости $F_1 = kx_1$ (показаны три) и сила тяжести mg из центра диска

Пружинки растянуты поровну, если они закреплены симметрично (например, через равные промежутки по 36 отверстиям): тогда диск горизонтален.

Расстояние от платформы до центра диска: пружинка длиной $l_0 + x_1$ идёт от платформы до диска, а центр диска лежит в плоскости, где закреплены нижние концы пружинок:

$$h_1 = l_0 + x_1.$$

2. Второй случай: диск на цепочке из шести пружинок. Пружинки лёгкие, поэтому сила в каждой из них одна и та же и равна силе, с которой нижняя пружинка тянет диск. Диск, подвешенный за одно отверстие, висит неподвижно, когда эта сила уравновешивает силу тяжести: $F_2 = mg$, а центр диска лежит на одной вертикали с отверстием, то есть на R ниже него (рис. 3): иначе момент силы тяжести относительно точки подвеса повернул бы диск.

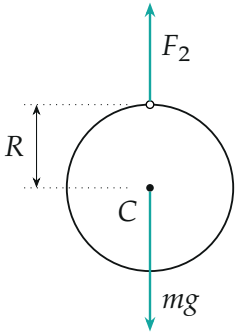


Рис. 3. Диск, подвешенный за отверстие: центр C лежит на вертикали с точкой подвеса, на R ниже неё

3. Растяжение цепочки. Каждая из шести пружинок растянута силой $F_2 = mg$, значит, по закону Гука на mg/k. Из п. 1 $mg/k = nx_1$, так что вся цепочка удлиняется на

$$x_2 = 6\,\frac{mg}{k} = 6nx_1.$$

Расстояние от платформы до центра диска складывается из шести нерастянутых длин, удлинения цепочки и радиуса диска:

$$h_2 = 6l_0 + x_2 + R = 6l_0 + 6nx_1 + R.$$

4. Условие задачи. Центр диска сместился на 58 см (вниз, рис. 4):

$$h_2 - h_1 = 6l_0 + 6nx_1 + R - l_0 - x_1 = 5l_0 + R - x_1 + 6nx_1 = 58 \text{ см}.$$

Подставляем $l_0 = 5$ см, $R = 10$ см, $x_1 = 1$ см: $25 + 10 - 1 + 6n = 58$, то есть

$$6n = 58 - 34 = 24 \quad \Rightarrow \quad n = 4.$$

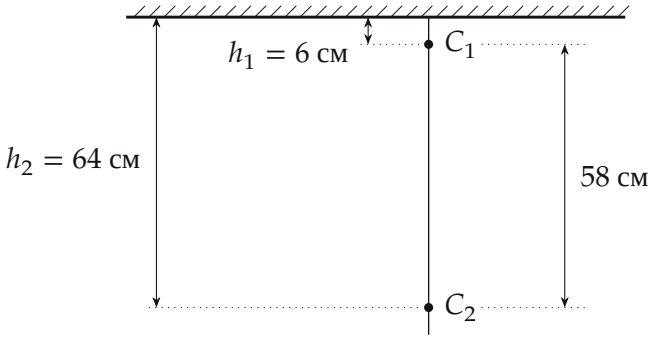


Рис. 4. Положение центра диска под платформой в масштабе: C_1 — первый случай, C_2 — второй; при $n = 4$ расстояния 6 и 64 см, разность 58 см

Обратите внимание.

- Во втором случае центр диска ниже отверстия на радиус R: подвешенный за одну точку диск висит так, что центр масс под точкой подвеса.
- В цепочке сила во всех пружинках одна и та же, а не делится между ними: каждая растянута так же, как n параллельных пружинок вместе, то есть в n раз сильнее, а вся цепочка — в $6n$ раз.
- В первом случае расстояние от платформы до центра равно $l_0 + x_1$: нижние концы пружинок закреплены в плоскости диска, а не на его оси.

Проверка. Размерность: все слагаемые в h_1, h_2 — длины. Для $n = 4$: $h_1 = 5 + 1 = 6$ см, $x_2 = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 24$ см, $h_2 = 30 + 24 + 10 = 64$ см, разность $64 - 6 = 58$ см — как в условии. Условие допустимо: четыре пружинки через каждые 9 из 36 отверстий стоят симметрично (крестом),

диск висит горизонтально, и $4 \leq 6$ — пружинок хватает. Смысл: цепочка из шести пружинок мягче связки из четырёх параллельных в $6 \cdot 4 = 24$ раза, и именно это даёт большую разность 58 см.

Ответ. Диск был уравновешен на $n = 4$ пружинках.