Воздушный шар из оболочки

Задача 3. [МОШ 2013/14, 8 класс, задача 3] Из тонкой оболочки поверхностной плотностью $\sigma = 50$ г/м^2 изготовили воздушный шар. При каких значениях радиуса R он сможет подняться в воздух плотностью $\rho_в = 1{,}3$ кг/м^3? Считайте, что шар наполняется гелием, плотность которого $\rho_г = 0{,}18$ кг/м^3. Объем шара радиусом R составляет $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, а площадь его поверхности равна $S = 4\pi R^2$.

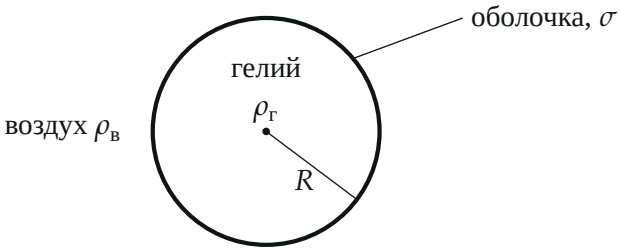


Рис. 1. Поясняющий рисунок: тонкая оболочка (толстая линия) с гелием внутри, снаружи воздух

▲ **Решение. Что происходит.** На шар действуют три силы: сила Архимеда от воздуха направлена вверх, сила тяжести оболочки и сила тяжести гелия — вниз. Шар поднимется, если выталкивающая сила больше суммы весов оболочки и гелия. Масса гелия и сила Архимеда растут как объём, то есть как R^3, а масса оболочки — как площадь поверхности, то есть как R^2: у маленького шара оболочка перевешивает, у большого выигрывают объём и воздух. Поэтому подъём возможен при R больше некоторого значения. Ключевые законы: закон Архимеда и условие отрыва (подъёмная сила больше суммы сил тяжести).

Обозначения. $m_о$ — масса оболочки, $m_г$ — масса гелия, F_A — сила Архимеда, g — ускорение свободного падения. Толщиной оболочки, объёмом её материала и грузом под шаром пренебрегаем.

1. Три величины. Масса тонкой оболочки — поверхностная плотность на площадь:

$$m_о = \sigma S = 4\pi\sigma R^2.$$

Масса гелия в объёме шара:

$$m_г = \rho_г V = \frac{4}{3}\pi\rho_г R^3.$$

Закон Архимеда: сила, действующая на шар, равна весу вытесненного воздуха:

$$F_A = \rho_в g V = \frac{4}{3}\pi\rho_в g R^3.$$

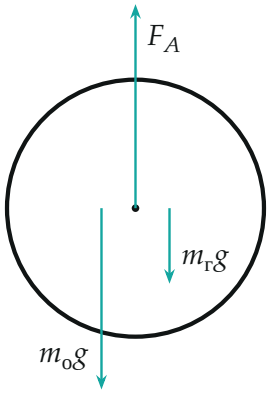


Рис. 2. Силы на шар в момент, когда он вот-вот оторвётся от земли (F_A равна сумме весов оболочки и гелия): сила Архимеда вверх, вес оболочки $m_о g$ и вес гелия $m_г g$ вниз; все три приложены в центре шара; вес оболочки намного больше веса гелия

2. Условие подъёма. Шар отрывается от земли, если сила Архимеда больше суммы сил тяжести оболочки и гелия (второй закон Ньютона: равнодействующая направлена вверх):

$$F_A > m_о g + m_г g.$$

Подставляем выражения из п. 1 и сокращаем на g:

$$\frac{4}{3}\pi\rho_в R^3 > 4\pi\sigma R^2 + \frac{4}{3}\pi\rho_г R^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi(\rho_в - \rho_г)R^3 > 4\pi\sigma R^2.$$

Делим на $\frac{4}{3}\pi R^2 > 0$:

$$(\rho_в - \rho_г)R > 3\sigma \quad \Rightarrow \quad R > \frac{3\sigma}{\rho_в - \rho_г}.$$

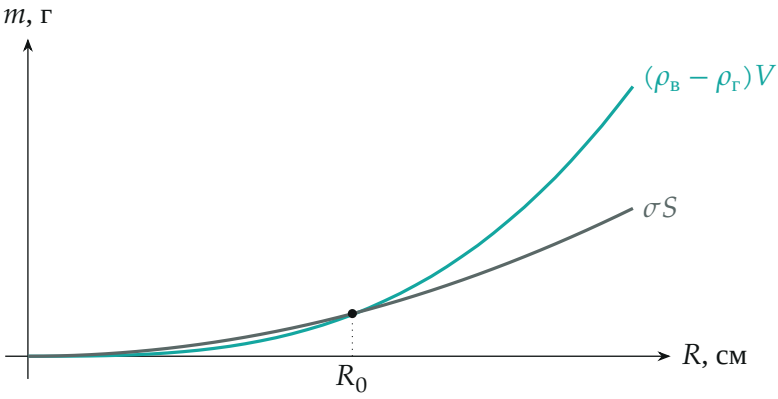


Рис. 3. Подъёмная сила воздуха за вычетом веса гелия, $(\rho_в - \rho_г)V \propto R^3$, и масса оболочки $\sigma S \propto R^2$ (по вертикали масса в граммах): кривые пересекаются при $R_0 \approx 13{,}4$ см, правее шар поднимется

3. Число. Переводим в СИ: $\sigma = 50$ г/м^2 $= 0{,}05$ кг/м^2:

$$R_0 = \frac{3\sigma}{\rho_в - \rho_г} = \frac{3 \cdot 0{,}05 \text{ кг/м}^2}{(1{,}3 - 0{,}18) \text{ кг/м}^3} = \frac{0{,}15}{1{,}12} \text{ м} \approx 0{,}134 \text{ м} = 13{,}4 \text{ см}.$$

Обратите внимание.

- Поверхностная плотность — масса на единицу площади оболочки; 50 г/м^2 переводим в кг/м^2, чтобы единицы совпали с плотностями воздуха и гелия.
- Сила Архимеда считается по плотности *воздуха*, а гелий входит отдельным слагаемым в вес, поэтому в ответе стоит разность $\rho_в - \rho_г$.
- Ответ — неравенство: при $R = R_0$ шар лишь уравновешен, при $R < R_0$ не взлетит.

Проверка. Размерность: σ/ρ — кг/м^2 делить на кг/м^3 даёт метры. Предельные случаи: если $\rho_г \to \rho_в$ (газ внутри как снаружи), $R_0 \to \infty$ — такой шар не взлетит при любом размере, верно; если $\rho_г \to 0$ (внутри пустота), $R_0 = 3\sigma/\rho_в \approx 11{,}5$ см — чуть меньше нашего, тоже разумно. Подстановка: при $R = 0{,}134$ м объём $V \approx 0{,}0101$ м^3, вытесненный воздух $\approx 13{,}1$ г, масса оболочки $4\pi R^2\sigma \approx 11{,}3$ г, масса гелия $\approx 1{,}8$ г: $11{,}3 + 1{,}8 \approx 13{,}1$ — равновесие. Смысл: шар из такой плёнки поднимается только от диаметра около 27 см; меньшие шарики перетягивает собственная оболочка.

Ответ. $R > \dfrac{3\sigma}{\rho_в - \rho_г} \approx 0{,}134$ м $= 13{,}4$ см.