Карусель из пяти дорожек

Задача 5. [МОШ 2013/14, 8 класс, задача 5] Карусель представляет собой пять круговых дорожек (см. рисунок). Внешняя дорожка (№ 1) всегда неподвижна; следующая (№ 2) может двигаться со скоростью 4,5 км/ч. Скорость движения полотна у дорожки № 3 в 2 раза больше, чем у второй. Скорость движения дорожки № 4 равна разности скоростей движения дорожек № 5 и № 2. Скорость движения пятой дорожки, радиус которой равен $R_5 = 20$ м, в 2 раза больше, чем у третьей. Ширина каждой дорожки равна $r = 1$ м. Вначале все дорожки неподвижны.

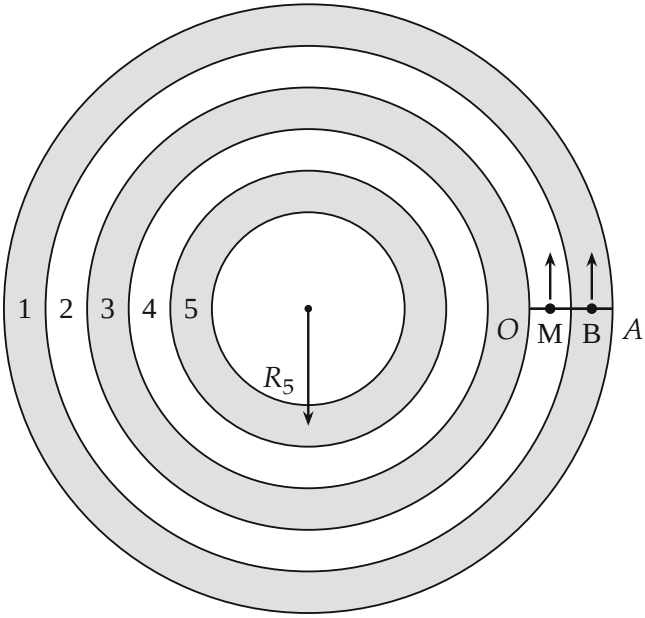


Рис. 1. Рисунок к условию (схема не в масштабе, вид сверху): пять круговых дорожек, на дорожках 1, 3 и 5 серый фон; R_5 — радиус дорожки № 5 (до её средней линии); O и A — концы линии старта, M — Маша на дорожке 2, B — Вася на дорожке 1; стрелки — направление движения (условно против часовой стрелки)

С линии AO в одном направлении стартуют двое одноклассников — отличник Вася по неподвижной дорожке № 1 на велосипеде и красавица

Маша по соседней дорожке № 2 — бегом. В момент их старта дорожки начинают двигаться, также вращаясь в одном направлении — каждая со своей скоростью. Маша начинает двигаться в направлении движения дорожек с постоянной скоростью $V_1 = 1{,}25$ м/с относительно полотна своей дорожки. Через некоторое время она перепрыгивает на соседнюю дорожку, причем скорость ее движения относительно полотна новой дорожки остается прежней. Так, последовательно перепрыгивая с дорожки на дорожку и находясь на каждой из них столько времени, сколько требуется, чтобы преодолеть одинаковые угловые расстояния, она добирается сначала до внутренней дорожки № 5, а потом возвращается на дорожку № 2.

С какой постоянной скоростью двигался Вася на велосипеде, если известно, что к линии старта/финиша они добрались одновременно, сделав один оборот вокруг центра карусели? Считать, что одноклассники все время перемещались точно по средним линиям дорожек.

▲ **Решение. Что происходит.** Вася и Маша стартуют вместе и приходят на линию старта одновременно, сделав один оборот, значит, у обоих время одно и то же — T. Вася едет с постоянной скоростью по неподвижной дорожке радиуса R_1, и его скорость $V = 2\pi R_1/T$. Время T найдём по Маше: её путь разбит на 7 участков с одинаковым углом поворота φ, и на каждом участке время равно углу, делённому на угловую скорость (скорость относительно земли делить на радиус). Ключевые законы: сложение скоростей (Маша бежит по ходу полотна) и связь угловой и линейной скорости $\omega = u/R$ при движении по окружности.

Обозначения. v_i — скорость полотна дорожки i, R_i — радиус её средней линии (по ней движутся оба), $V_1 = 1{,}25$ м/с — скорость Маши относительно полотна, u_k — скорость Маши относительно земли на k-м участке, φ — угол одного участка, t_k — время на нём.

1. Скорости полотен. Дорожка 1 неподвижна: $v_1 = 0$. Дорожка 2: $v_2 = 4{,}5$ км/ч $= 1{,}25$ м/с (это ровно V_1). Остальные по условию: $v_3 = 2v_2 = 2{,}5$ м/с, $v_5 = 2v_3 = 5$ м/с, $v_4 = v_5 - v_2 = 3{,}75$ м/с.

2. Радиусы средних линий. На рисунке радиус $R_5 = 20$ м проведён

до середины дорожки № 5 и ширина дорожки $r = 1$ м, поэтому

$$R_5 = 20\text{ м}, \quad R_4 = 21\text{ м}, \quad R_3 = 22\text{ м}, \quad R_2 = 23\text{ м}, \quad R_1 = 24\text{ м}.$$

3. Маршрут Маши. Она идёт по дорожкам $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2$: всего 7 участков (рис. 2), на каждом поворачивает на один и тот же угол φ, измеряемый относительно земли (линия старта AO неподвижна). Вместе они дают один полный оборот:

$$7\varphi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{7}.$$

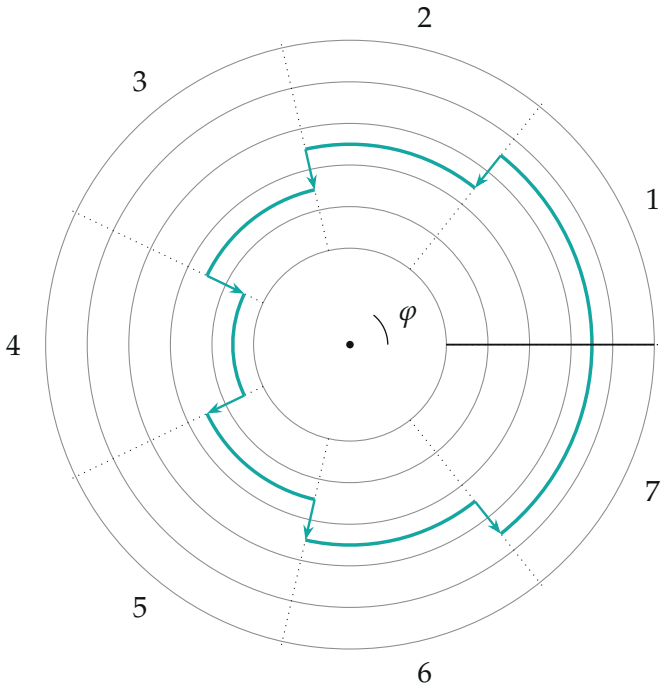


Рис. 2. Маршрут Маши (вид сверху, схема): семь участков с одинаковым углом $\varphi = 2\pi/7$ каждый; на границах — прыжки на соседнюю дорожку (стрелки); числа снаружи — номера участков

4. Скорость Маши на участке. Маша бежит по ходу полотна, поэтому её скорость относительно земли — сумма скорости относительно полотна и скорости самого полотна: $u_k = V_1 + v_k$ (рис. 3).

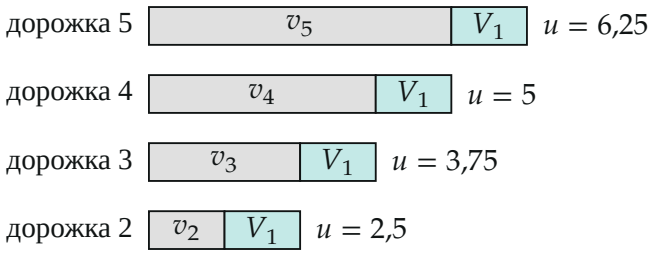


Рис. 3. Скорость Маши относительно земли на дорожках 2–5: скорость полотна (серое) плюс V_1 (бирюзовое), значения и в м/с; масштаб — 0,8 см на 1 м/с

5. Время на участке. На k-м участке Маша движется по окружности радиуса R_k со скоростью u_k, угловая скорость $\omega_k = u_k/R_k$, и поворот на угол φ занимает

$$t_k = \frac{\varphi}{\omega_k} = \varphi\,\frac{R_k}{u_k}.$$

Значения по участкам:

k	дорожка	R_k, м	v_k, м/с	u_k, м/с	R_k/u_k, с
1	2	23	1,25	2,5	9,20
2	3	22	2,5	3,75	5,87
3	4	21	3,75	5	4,20
4	5	20	5	6,25	3,20
5	4	21	3,75	5	4,20
6	3	22	2,5	3,75	5,87
7	2	23	1,25	2,5	9,20

Полное время:

$$T = \varphi \sum_{k=1}^{7} \frac{R_k}{u_k} = \frac{2\pi}{7} \cdot 41{,}73\ \text{с} \approx 37{,}5\ \text{с}.$$

6. Скорость Васи. Вася едет по неподвижной дорожке 1 (радиус $R_1 = 24$ м) один оборот за то же время T:

$$V = \frac{2\pi R_1}{T} = \frac{2\pi R_1}{\frac{2\pi}{7}\cdot 41{,}73} = \frac{7\cdot 24}{41{,}73}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 4{,}0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\ (\approx 14{,}5\ \text{км/ч}).$$

Обратите внимание.

- Равны *углы* участков, а не времена и не длины дуг: на дорожке 2 Маша проводит около 8,3 с, на дорожке 5 — около 2,9 с.
- Скорость Маши относительно земли — сумма $V_1 + v_k$, а не V_1: она бежит в ту же сторону, куда движется полотно.
- 4,5 км/ч — это 1,25 м/с, ровно V_1; перевод в м/с нужен, чтобы все скорости были в одних единицах.

Проверка. Размерность: R_k/u_k — секунды на радиан, T — секунды, V — м/с. Второй способ: путь Маши за оборот (дуги разных радиусов) $\varphi\sum R_k = (2\pi/7)\cdot 152 \approx 136{,}4$ м, значит, её средняя скорость относительно земли $136{,}4/37{,}5 \approx 3{,}64$ м/с — между наименьшей (2,5 м/с) и наибольшей (6,25 м/с) скоростями на участках, как и должно быть. Вася едет по внешней дорожке, и его путь длиннее: $2\pi\cdot 24 \approx 150{,}8$ м, поэтому и скорость больше средней скорости Маши: $150{,}8/37{,}5 \approx 4{,}0$ м/с. Смысл: полотна ускоряют Машу, а Васе приходится ехать быстрее неё, потому что его окружность самая длинная.

Ответ. Скорость Васи $V = \dfrac{7R_1}{\sum R_k/u_k} \approx 4$ м/с.