Стопка кирпичей

Задача 6. [МОШ 2013/14, 8 класс, задача 6] На горизонтальной поверхности лежит стопка кирпичей, так, как показано на рисунке. Площадь соприкасающихся участков кирпичей очень мала (много меньше площадей всех граней кирпичей). Все кирпичи однородные и имеют одинаковый вес $P = 25$ Н.

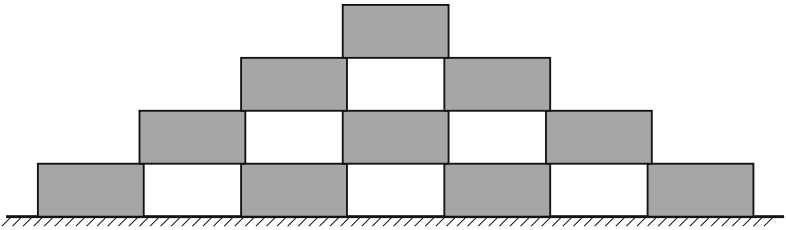


Рис. 1. Рисунок к условию: четыре ряда по 4, 3, 2 и 1 кирпичу; каждый кирпич верхнего ряда опирается концами на концы двух кирпичей ниже

Вычислите, с какой силой каждый кирпич из нижнего ряда давит на поверхность.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый кирпич лежит на двух кирпичах ниже и опирается на них концами: площадь касания мала, поэтому сила в каждой точке касания приложена у самого торца кирпича. Идём сверху вниз. Верхний кирпич симметричен — его вес делится пополам между опорами. У каждого следующего кирпича известны вес и давление сверху, а две опорные силы находятся из двух условий равновесия: сумма вертикальных сил равна нулю и сумма моментов относительно центра кирпича равна нулю. Ключевые законы: условия равновесия твёрдого тела (силы и моменты) и третий закон Ньютона: верхний кирпич давит на нижний с той же силой, с какой нижний подпирает верхний.

Обозначения. b — длина кирпича, $N_1, \ldots, N_6$ — силы взаимодействия в шести точках левой половины стопки (рис. 2); правая половина симметрична. Нижние кирпичи B_1 и B_2 давят на поверхность с силами Q_1 и Q_2.

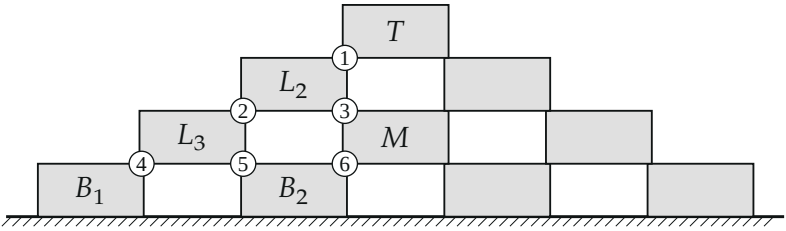


Рис. 2. Точки взаимодействия кирпичей (левая половина стопки; правая — зеркальное отражение): T — верхний кирпич, L_2 — левый кирпич второго ряда, L_3 и M — левый и средний кирпичи третьего ряда, B_1, B_2 — кирпичи нижнего ряда. Точка в кружке — место, где один кирпич касается другого у торца (торцы на рисунке сильно перекрыты ради видимости)

1. Верхний кирпич T. Он лежит концами на L_2 и на зеркальном ему кирпиче. По симметрии силы в обеих опорах равны, а сумма вертикальных сил равна нулю:

$$2N_1 = P \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{P}{2}.$$

2. Кирпич L_2. На него действуют (рис. 3): вес P в центре; давление кирпича T вниз на правый торец, равное N_1 по третьему закону Ньютона; опорные силы N_2 и N_3 вверх на торцах. Сумма вертикальных сил, проекция на вертикаль вверх:

$$N_2 + N_3 = P + N_1.$$

Сумма моментов относительно центра L_2: вес момента не создаёт, плечо каждой из трёх торцевых сил равно $b/2$. Сила N_3 (вверх на правом торце) вращает кирпич против часовой стрелки, силы N_1 (вниз на правом торце) и N_2 (вверх на левом торце) — по часовой. Кирпич не вращается, поэтому

$$N_3\frac{b}{2} = N_1\frac{b}{2} + N_2\frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad N_3 = N_1 + N_2.$$

Подставляем в сумму сил: $N_2 + N_1 + N_2 = P + N_1$, откуда

$$N_2 = \frac{P}{2}, \qquad N_3 = N_1 + N_2 = P.$$

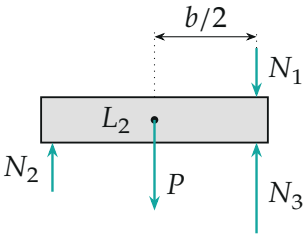


Рис. 3. Силы на кирпич L_2: вес P в центре, давление верхнего кирпича N_1 на правый торец сверху, опорные силы N_2 (левый торец) и N_3 (правый торец) снизу; плечи торцевых сил относительно центра равны $b/2$

3. Кирпич L_3. Нагрузка на него сверху — левый торец L_2, давящий с силой $N_2 = P/2$ на правый торец; опоры — левый торец на B_1 (сила N_4) и правый торец на B_2 (сила N_5). Картина та же, что для L_2, с заменой $N_1 \to N_2$, $N_2 \to N_4$, $N_3 \to N_5$:

$$N_4 + N_5 = P + N_2, \qquad N_5 = N_2 + N_4.$$

Отсюда $2N_4 + N_2 = P + N_2$, то есть

$$N_4 = \frac{P}{2}, \qquad N_5 = N_2 + N_4 = P.$$

4. Кирпич M. Он стоит на левом торце B_2 и на левом торце B_3 (зеркальный B_2); сверху на его торцы давят L_2 и зеркальный ему кирпич, каждый с силой $N_3 = P$. Опорные силы по симметрии одинаковы, N_6 каждая:

$$2N_6 = P + N_3 + N_3 = 3P \quad \Rightarrow \quad N_6 = \frac{3P}{2}.$$

5. Давление нижних кирпичей на поверхность. Нижний кирпич B_1 получает вес P и давление N_4 кирпича L_3 на правый торец. Поверхность

давит на него вверх с силой Q_1, равной по третьему закону Ньютона искомой силе давления B_1 на поверхность:

$$Q_1 = P + N_4 = \frac{3P}{2} = 1{,}5P = 37{,}5\ \text{Н}.$$

Кирпич B_2 получает вес P, давление L_3 на левый торец (N_5) и давление M на правый торец (N_6):

$$Q_2 = P + N_5 + N_6 = P + P + \frac{3P}{2} = \frac{7P}{2} = 3{,}5P = 87{,}5\ \text{Н}.$$

Правая половина стопки симметрична: кирпич B_3 нагружен как B_2, кирпич B_4 — как B_1.

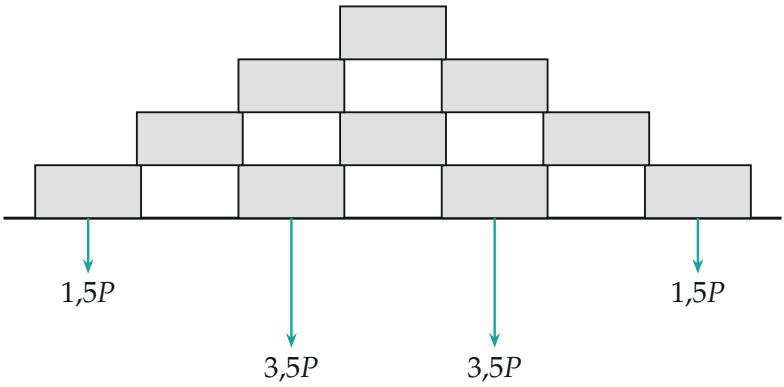


Рис. 4. Силы, с которыми кирпичи нижнего ряда давят на поверхность (длины стрелок — по модулю): $1{,}5P$ у крайних и $3{,}5P$ у средних кирпичей; в сумме $10P$ — вес всей стопки

Обратите внимание.

- Точки касания — у торцов кирпичей: так сказано в условии (площадь касания мала) и показано на рисунке, поэтому плечо всех торцевых сил относительно центра равно $b/2$.
- Опорные силы кирпича не равны, если он нагружен с одного края: на этом краю опора больше ($N_3 = P$ при $N_2 = P/2$ у L_2).
- На поверхность давит нижний кирпич целиком: поверхность распределяет силу по всей грани, нужна только их сумма Q.

Проверка. Размерность: все величины — силы, кратные P. Второй способ для L_2: моменты относительно его левого торца: $N_3 b - N_1 b - P \cdot b/2 = 0$, откуда $N_3 = N_1 + P/2 = P$ — как выше. Общий баланс: нижний ряд держит всю стопку, $2Q_1 + 2Q_2 = 3P + 7P = 10P$ — вес десяти кирпичей. Устойчивость нижнего кирпича B_2: сила Q_2 приложена не по центру, а смещена к правому торцу на $(1{,}5P - P) \cdot (b/2)/(3{,}5P) = b/14 < b/2$, то есть в пределах опоры — кирпич не опрокидывается. Смысл: нагрузка накапливается к середине пирамиды — средние кирпичи давят на поверхность в $7/3$ раза сильнее крайних.

Ответ. Два крайних кирпича давят на поверхность с силами $1{,}5P = 37{,}5$ Н, два средних — с силами $3{,}5P = 87{,}5$ Н.