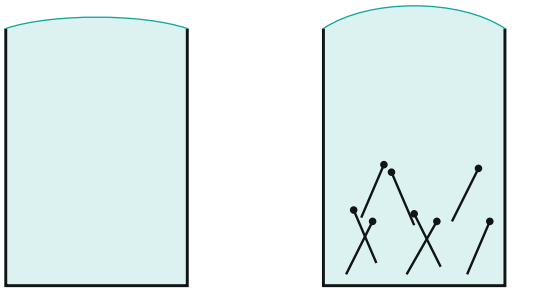
«Бездонный бокал» с булавками

Задача 7. [МОШ 2013/14, 8 класс, задача 7] В известном опыте «Бездонный бокал» в стеклянный бокал, доверху наполненный водой, аккуратно опускают одну за другой булавки. При этом вода приподнимается над краями стакана, но не выливается из него (за счет явления смачивания).

Возьмем доверху наполненный водой цилиндрический стакан и взвесим его. Затем начнем аккуратно опускать в него булавки (длина булавки 2,5 см, толщина 0,4 мм) одну за другой до тех пор, пока вода потечет по внешним стенкам стакана. Так же аккуратно протрем стенки и края стакана от оставшихся капель воды, и взвесим этот стакан с булавками и водой. Сколько булавок находится в стакане, если в результате взвешиваний было обнаружено, что изменение массы стакана (который сначала был с водой, но без булавок) составило 19,21 г?

Плотность воды 1 г/см^3, плотность металла, из которого изготовлены булавки, 7800 кг/м^3.



стакан с водой
масса M_0

стакан с булавками
масса M_1

Рис. 1. Поясняющий рисунок (не в масштабе): полный стакан до опыта и после — в нём булавки, вода выпукла над краем; взвешиваем до опускания и после (стенки вытерты)

▲ **Решение. Что происходит.** Стакан был полон, поэтому вода, которую вытесняет булавка, выливается: булавка занимает место воды того же объёма. Стакан становится тяжелее на массу булавки, но легче на

массу воды, которая вытекла. Все булавки одинаковы, поэтому прибавка массы пропорциональна их числу, и по ней число булавок находится делением. Ключевые законы: масса через плотность $m = \rho V$ и сохранение массы (что прибавилось в стакане, что убыло с водой).

Обозначения. N — число булавок, V — объём одной булавки, $l = 2{,}5$ см — длина, $d = 0{,}4$ мм $= 0{,}04$ см — толщина (диаметр), $\rho_м = 7800$ кг/м^3 $= 7{,}8$ г/см^3, $\rho_в = 1$ г/см^3, $\Delta M = 19{,}21$ г — изменение массы стакана. Булавку считаем тонким цилиндром, шляпку и острие не учитываем; прибавкой воды над краем (выпуклой «шапкой») пренебрегаем: она есть и до, и после опыта.

1. Объём булавки. Булавка — цилиндр длиной l и диаметром d (рис. 2):

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi \cdot (0{,}04\text{ см})^2}{4} \cdot 2{,}5\text{ см} = \pi \cdot 10^{-3}\text{ см}^3 \approx 3{,}14 \cdot 10^{-3}\text{ см}^3.$$



Рис. 2. Булавка как цилиндр (толщина для видимости увеличена, на самом деле $d \approx l/60$)

2. Что прибавляет одна булавка. Масса булавки и масса воды, вытесненной ею (объём тот же):

$$m = \rho_м V = 7{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3}\text{ см}^3 \approx 24{,}5\text{ мг}, \qquad m_в = \rho_в V \approx 3{,}14\text{ мг}.$$

Булавка кладёт в стакан 24,5 мг, вытесненная вода уносит 3,14 мг, итого стакан тяжелеет на

$$\Delta m = m - m_в = V(\rho_м - \rho_в) = 3{,}14 \cdot 10^{-3}\text{ см}^3 \cdot 6{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \approx 21{,}4\text{ мг}.$$

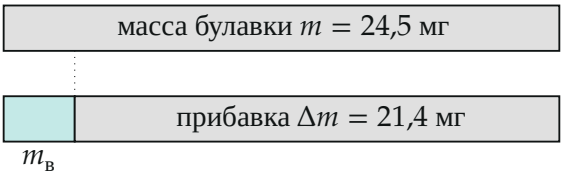


Рис. 3. Куда делась масса булавки (в масштабе: 0,3 см на 1 мг): из 24,5 мг булавки 3,14 мг уходят с вылившейся водой $m_в$, остальные 21,4 мг — прибавка стакана

3. Число булавок. Все булавки одинаковы, поэтому N булавок дают $\Delta M = N\,V(\rho_м - \rho_в)$:

$$N = \frac{\Delta M}{V(\rho_м - \rho_в)} = \frac{19{,}21\ \text{г}}{3{,}14 \cdot 10^{-3}\ \text{см}^3 \cdot 6{,}8\ \text{г/см}^3} = \frac{19{,}21}{0{,}02136} \approx 899.$$

Организаторы указывают 898 и допускают 895–902: разница в третьем знаке — округление π и размеров, число булавок целое.



Рис. 4. Прибавка массы стакана ΔM растёт прямо пропорционально числу булавок N; при $\Delta M = 19{,}21$ г получаем $N \approx 899$

Обратите внимание.

- Прибавка массы — это масса булавки *минус* масса вытесненной воды: если пренебречь водой, получилось бы $N \approx 784$, ошибка 13 %.

- Единицы: $d = 0{,}4$ мм $= 0{,}04$ см, плотность металла 7800 кг/м^3 $=$ 7,8 г/см^3 — удобнее считать в граммах и кубических сантиметрах.
- Вода не остаётся в стакане: она выливается за край, и стенки вытирают, поэтому взвешивание учитывает только то, что осталось.

Проверка. Размерность: г$\big/$(см^3 $\cdot$ г/см^3) даёт безразмерное число. Второй способ: масса вылившейся воды $N\rho_{\text{в}}V \approx 899 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3} \approx 2{,}82$ г, масса булавок $Nm \approx 899 \cdot 24{,}5$ мг $\approx 22{,}0$ г, и $22{,}0 - 2{,}8 \approx 19{,}2$ г — как в условии. Прямая подстановка: 899 булавок дают $899 \cdot 21{,}36$ мг $= 19{,}205$ г $\approx 19{,}21$ г, а 898 булавок — 19,18 г: ближе 899. Смысл: булавка вытесняет воду, примерно в 7,8 раза более лёгкую, чем она сама (отношение плотностей), поэтому почти весь вес булавки добавляется к стакану, и 899 булавок — это около 22 г металла.

Ответ. Примерно 899 булавок (организаторы: 898, допускается 895–902).