Быстрее вскипятить 100 литров

Задача 8. [МОШ 2013/14, 8 класс, задача 8] В распоряжении школьника Вовы имеется водопроводная вода температурой 20 °C, чайник мощностью 1,2 кВт и вместительностью 1,5 л, электрокипятильник мощностью 500 Вт, а также большой калориметр, в котором требуется получить 100 литров кипятка температурой 100 °C. Как сделать это за наименьшее время? Вова предложил следующий план действий: нужно налить в калориметр некоторый начальный объём воды V_0, опустить туда включенный кипятильник, и одновременно кипятить воду в чайнике, доливая из него в калориметр порции кипятка по мере его готовности. Определите, каким должен быть начальный объём V_0, и за какое время τ удастся получить в калориметре 100 литров кипятка, действуя указанным способом. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·°C), плотность воды 1 г/см^3. Теплоемкостью калориметра, потерями теплоты в окружающую среду и временем, затраченным на наполнение чайника и выливание из него кипятка, можно пренебречь.

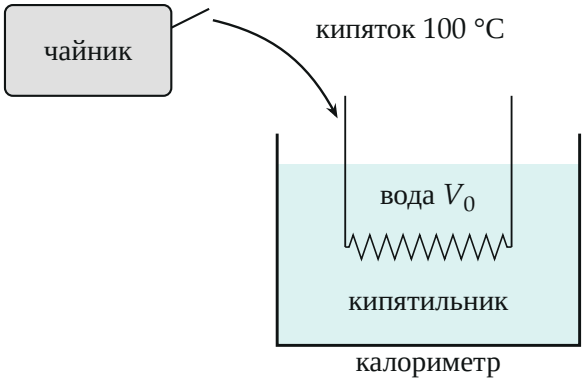


Рис. 1. Схема опыта (не в масштабе): в калориметре — вода объёма V_0 и включённый кипятильник; одновременно кипятится вода в чайнике, и готовый кипяток доливается в калориметр порциями

▲ **Решение.** **Что происходит.** Энергия, нужная на нагрев 100 л воды от 20 до 100 °C, фиксирована, а мощности двух нагревателей складываются. Быстрее всего получится, если оба нагревателя работают без

простоя до самого конца и заканчивают одновременно: тогда время равно энергии, делённой на суммарную мощность. Для этого воду делят на две части: V_0 в калориметре греет кипятильник, а остальные $V - V_0$ за то же время вскипячивает чайник, и они доливаются. Ключевые законы: количество теплоты при нагревании $Q = c\rho V\Delta t$ и связь с мощностью $Q = N\tau$ (потерями тепла по условию пренебрегаем).

Обозначения. $V = 100$ л — конечный объём, V_0 — начальный объём в калориметре, $V_1 = V - V_0$ — объём, нагретый чайником, $N_1 = 1200$ Вт — мощность чайника, $N_2 = 500$ Вт — мощность кипятильника, $\Delta t = 100 - 20 = 80$ °C, τ — время. Плотность воды 1 кг/л, поэтому 1 л воды — это 1 кг.

1. Энергия на один литр и на всё. Чтобы нагреть 1 л воды на 80 °C, нужно

$$\kappa = c\rho \cdot 1\text{ л} \cdot \Delta t = 4200\ \tfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}} \cdot 1\text{ кг} \cdot 80\ {}^\circ\text{C} = 336\text{ кДж},$$

на 100 л — $Q = \kappa V = 33{,}6$ МДж.

2. Меньше времени быть не может. За время τ оба нагревателя вместе отдают не больше $(N_1 + N_2)\tau$, а нужно Q:

$$\tau \geq \frac{Q}{N_1 + N_2} = \frac{33{,}6 \cdot 10^6}{1700}\text{ с} \approx 19\,765\text{ с} \approx 5{,}49\text{ ч}.$$

Равенство получится, если оба нагревателя работают без остановки до конца и вся их энергия идёт на нагрев воды.

3. Как этого добиться: подбор V_0. Кипятильник за время τ отдаёт $N_2\tau$ и нагревает от 20 до 100 °C воду V_0; чайник за то же время отдаёт $N_1\tau$ и вскипячивает V_1 (порциями до 1,5 л, готовая порция сразу доливается, чайник не простаивает):

$$N_2\tau = \kappa V_0, \qquad N_1\tau = \kappa V_1, \qquad V_0 + V_1 = V.$$

Складываем первые два равенства и подставляем $V_0 + V_1 = V$: $(N_1 +$

$N_2)\tau = \kappa V$, откуда

$$\tau = \frac{\kappa V}{N_1 + N_2} = \frac{c\rho V \Delta t}{N_1 + N_2} \approx 19\,765 \text{ с} \approx 5{,}5 \text{ ч}.$$

Из первого равенства

$$V_0 = \frac{N_2 \tau}{\kappa} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} V = \frac{500}{1700} \cdot 100 \text{ л} \approx 29{,}4 \text{ л}.$$

Чайник вскипятит $V_1 = 100 - 29{,}4 = 70{,}6$ л, это около 47 порций по 1,5 л (одна порция — $1{,}5 \cdot 336/1{,}2 = 420$ с $= 7$ мин).

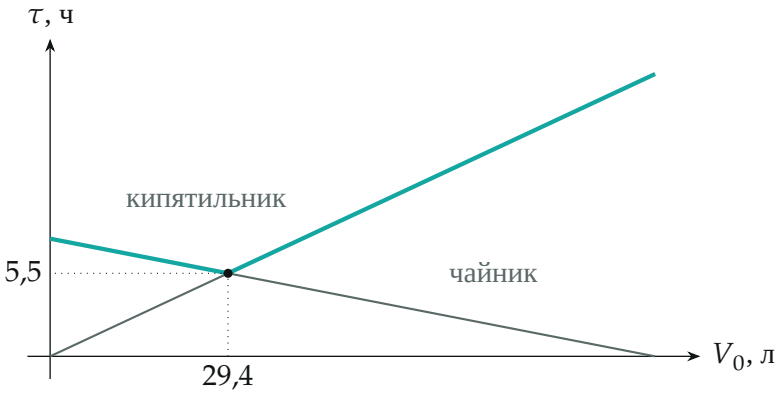


Рис. 2. Время нагрева в зависимости от V_0: кипятильнику нужно $\kappa V_0/N_2$ (прямая вверх), чайнику — $\kappa(V - V_0)/N_1$ (прямая вниз); весь процесс идёт дольше из двух (бирюзовая линия), и наименьшее время — в точке пересечения, $V_0 \approx 29{,}4$ л, $\tau \approx 5{,}5$ ч

Подтверждаем выбор V_0 на графике (рис. 2). Если V_0 больше, кипятильник греет свою воду дольше, чем чайник — свою ($\kappa V_0/N_2 > \kappa V_1/N_1$), чайник заканчивает раньше и простаивает, а время процесса определяет кипятильник и оно растёт с V_0. Если V_0 меньше, дольше работает чайник, и время растёт при уменьшении V_0. Время всего процесса — большее из двух, оно наименьшее там, где они равны:

$$\frac{\kappa V_0}{N_2} = \frac{\kappa(V - V_0)}{N_1} \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} V,$$

то есть при том же $V_0 \approx 29{,}4$ л.

4. Не закипит ли вода раньше времени. В момент $t = s\tau$ ($0 \le s \le 1$) в калориметре V_0 воды и долитая из чайника $V_1 s$ воды при 100 °C. Энергия кипятильника идёт на нагрев всего содержимого:

$$c\rho\left[(V_0 + V_1 s)\,T - 20V_0 - 100V_1 s\right] = N_2 s\tau,$$

откуда, учитывая $N_2\tau = \kappa V_0 = c\rho \cdot 80\,V_0$,

$$T(s) = 100 - \frac{80\,V_0\,(1-s)}{V_0 + V_1 s}.$$

Температура растёт от 20 °C при $s = 0$ до ровно 100 °C при $s = 1$ и нигде не выше 100 °C (рис. 3): всё закипает к концу, а не раньше.

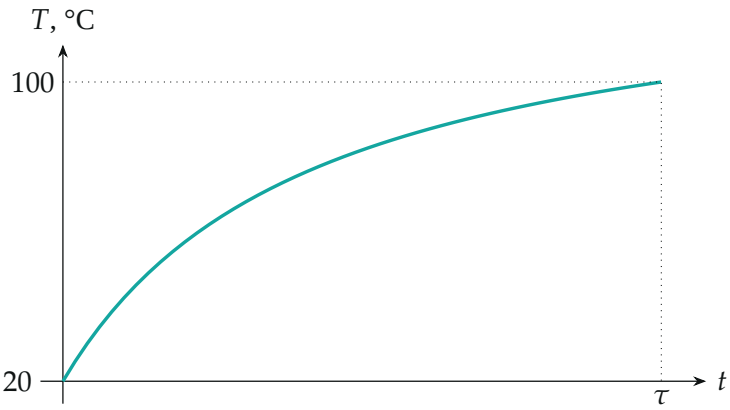


Рис. 3. Температура воды в калориметре за время процесса (долив чайника считаем непрерывным): растёт от 20 до 100 °C и достигает 100 °C лишь в конце, $t = \tau$

Обратите внимание.

- Дело не в том, чтобы разом нагреть всё, а в том, чтобы мощности не простаивали и работали до одного и того же момента.
- Масса: 1 л воды — 1 кг, отсюда V в литрах и m в килограммах равны.

- Порции из чайника по 1,5 л малы по сравнению с 100 л, поэтому долив можно считать непрерывным, а время на долив и наполнение чайника, по условию, нулевое.

Проверка. Размерность: $\kappa V/N$ — Дж делить на Вт даёт секунды. Подстановка: кипятильник за 19 765 с отдаёт $500 \cdot 19\,765 \approx 9{,}88$ МДж $= 336$ кДж/л $\cdot 29{,}4$ л; чайник — $1200 \cdot 19\,765 \approx 23{,}7$ МДж $= 336 \cdot 70{,}6$ кДж; вместе 33,6 МДж — ровно то, что нужно. Предельные случаи: без кипятильника ($N_2 \to 0$) $V_0 \to 0$, время $33{,}6 \cdot 10^6/1200 = 28\,000$ с $\approx 7{,}8$ ч; без чайника ($N_1 \to 0$) $V_0 \to V$ и время $33{,}6 \cdot 10^6/500 \approx 18{,}7$ ч — хуже, чем с двумя нагревателями. Смысл: 5,5 часа — потому что энергии нужно очень много (33,6 МДж), а мощностей всего 1,7 кВт; только их полная совместная загрузка даёт наименьшее время.

Ответ. $V_0 = \dfrac{N_2}{N_1 + N_2} V \approx 29{,}4$ л; $\tau = \dfrac{c\rho V \Delta t}{N_1 + N_2} \approx 5{,}5$ ч.