Безопасная дистанция между автомобилями

Задача 1. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 1] Считается, что минимальное безопасное расстояние между автомобилями (минимальная дистанция) может быть рассчитана по формуле «половина скорости в метрах». Например, при движении со скоростью 60 км/ч минимальная безопасная дистанция будет равна 30 м, а при движении со скоростью 90 км/ч она составит 45 м.

Два одинаковых автомобиля движутся по прямой дороге один за другим с одинаковыми скоростями, причем дистанция между ними в точности минимальная безопасная. Допустим, что первый из автомобилей начал сбрасывать скорость, и через некоторое время остановился. Водитель второго автомобиля среагировал на это спустя некоторое время t и точно так же начал сбрасывать скорость до полной остановки. Но если бы второй водитель не среагировал достаточно быстро, то автомобили столкнулись бы. Найдите максимальное время реакции водителя t, при котором формула «половина скорости в метрах» гарантирует, что автомобили не столкнутся.

▲ **Решение. Что происходит.** Оба автомобиля тормозят по одному и тому же закону, но второй начинает на время t позже. Всё это время он едет с прежней скоростью, поэтому к моменту остановки его путь оказывается больше пути первого ровно на «лишний» отрезок. Остановились оба — зазор перестал меняться; значит, нужно найти зазор после остановки и потребовать, чтобы он не был отрицательным. Это задача о двух телах с одинаковым законом скорости, сдвинутым по времени.

Обозначения. v — общая начальная скорость, L — начальная дистанция, τ — время от начала торможения первого автомобиля, $v_1(\tau)$ и $v_2(\tau)$ — скорости автомобилей. Ось x направлена вдоль дороги по движению.

1. Формула для дистанции. Скорость $v_{\text{км/ч}}$ в километрах в час — это $v_{\text{км/ч}}/3{,}6$ м/с. Дистанция в метрах равна половине числа $v_{\text{км/ч}}$:

$$L = \frac{v_{\text{км/ч}}}{2} = \frac{3{,}6\,v}{2} = 1{,}8\,v \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{v} = 1{,}8\text{ с},$$

где v в м/с, а L в м. Проверка по условию: 60 км/ч $= 16{,}7$ м/с, $1{,}8 \cdot 16{,}7 = 30$ м. Отношение L/v от скорости не зависит.

2. Законы движения. Закон торможения первого автомобиля нам не дан (равномерное оно или нет, неважно), известно лишь, что скорость $v_1(\tau)$ не растёт и от v доходит до нуля. Второй автомобиль «точно так же» тормозит, но с задержкой t:

$$v_2(\tau) = v \ \ (\tau < t), \qquad v_2(\tau) = v_1(\tau - t) \ \ (\tau \geqslant t).$$

Так как v_1 не растёт, всегда $v_2(\tau) \geqslant v_1(\tau)$: второй едет не медленнее первого, зазор может только уменьшаться, и его наименьшее значение — после остановки обоих.

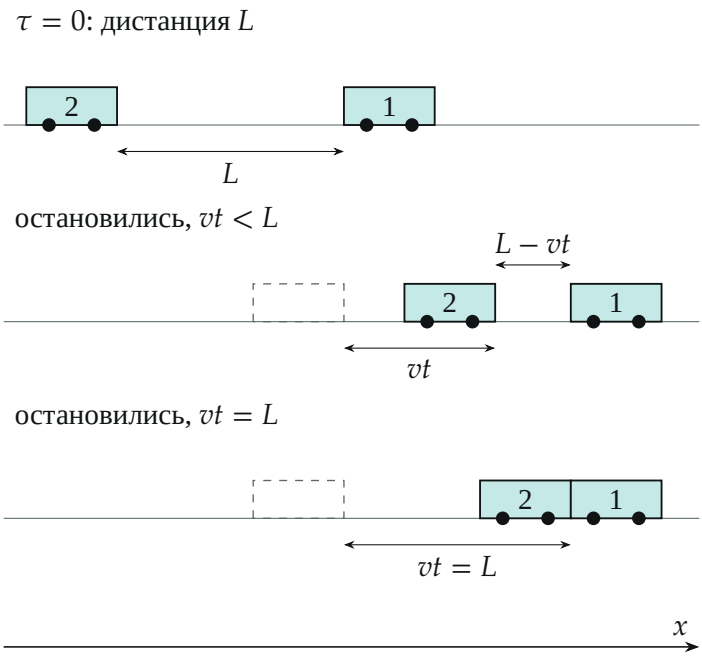


Рис. 1. Штриховой контур — где остановился бы второй автомобиль, если бы начал тормозить одновременно с первым. Реальная остановка сдвинута вперёд на vt.

3. Площадь между графиками. Расстояние между автомобилями в момент τ равно начальной дистанции минус то, на сколько второй про-

ехал больше первого:

$$\Delta(\tau) = L - \int_0^\tau (v_2 - v_1)\, d\tau'.$$

На графиках скорости интеграл — площадь между кривыми (рис. 2). Полная площадь за всё время:

$$\int_0^\infty (v_2 - v_1)\, d\tau = \int_0^\infty v_2\, d\tau - \int_0^\infty v_1\, d\tau$$
$$= \left(vt + \int_0^\infty v_1\, d\tau\right) - \int_0^\infty v_1\, d\tau = vt.$$

Первое слагаемое в скобках — путь с постоянной скоростью v за время t, второе — путь, пройденный по «сдвинутому» закону, он равен пути первого. Площадь между кривыми не зависит от формы кривой и равна площади полосы шириной t и высотой v.

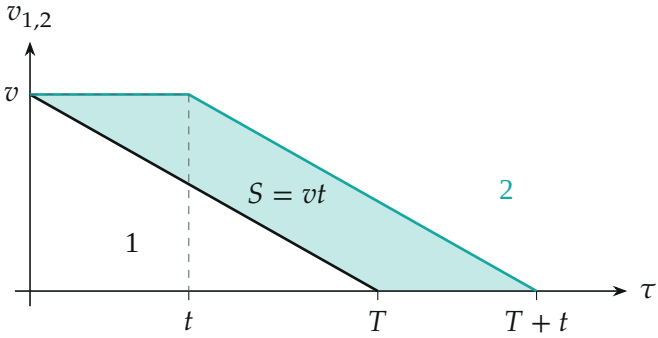


Рис. 2. Скорости автомобилей: 1 — первый, 2 — второй (тот же график, сдвинутый на t). T — время торможения первого. Закрашена площадь, равная лишнему пути vt.

4. Условие без столкновения. Наименьший зазор — после остановки обоих:

$$\Delta_{\min} = L - vt \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad t \leqslant \frac{L}{v} = 1{,}8 \text{ с}.$$

Если реакция дольше, второй автомобиль въедет в первый ещё до остановки обоих.

Обратите внимание. Ответ не зависит ни от скорости, ни от силы торможения, ни от того, равномерно ли оно. Всё, что нужно, — что оба автомобиля повторяют один и тот же закон торможения.

Проверка. Размерность: L/v — метры на метры в секунду, секунды. Пример с постоянным замедлением 5 м/с^2 при $v = 16{,}7$ м/с: первый останавливается через $v^2/2a = 27{,}8$ м после начала торможения, на месте $30 + 27{,}8 = 57{,}8$ м от старта второго; второй за $t = 1{,}8$ с проедет 30 м и затормозит ещё на 27,8 м, то есть остановится на 57,8 м — касание, как и должно быть при предельном t. При $t \to 0$ автомобили тормозят одинаково и зазор остаётся L. Физический смысл: за время реакции водитель «теряет» путь vt, и этот путь должен уместиться в запас дистанции.

Ответ. $t_{\max} = L/v = 1{,}8$ с.