Капли с ветки и пешеход

Задача 2. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 2] С ветки дерева, расположенной на высоте $H = 5$ м, с интервалом $\tau = 0{,}5$ с отрываются капли воды и падают на тротуар. С какой минимальной скоростью V должен идти худой пешеход, чтобы, не замочившись, проскочить опасное место? Считать, что рост пешехода $h = 180$ см, диаметр его шляпы $D = 30$ см, ширина шага $L = 60$ см, ботинки в крайних положениях по горизонтали выступают из-под шляпы симметричным образом, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь, ботинки считать точечными!

▲ **Решение. Что происходит.** Все капли отрываются от одной точки без начальной скорости, поэтому падают по одной и той же вертикали, одна за другой через τ. Пешеход — это шляпа шириной D, которая проходит эту вертикаль за время D/V. Чтобы ни одна капля не попала в шляпу, нужно, чтобы за это время ни одна капля не пролетела высоту шляпы. Минимальная скорость достигается, когда шляпа успевает пройти линию падения как раз между двумя соседними каплями. Затем надо проверить ботинки: капля не должна попасть и в них.

Обозначения. Ось y вверх от тротуара, ось x по ходу пешехода. t_H, t_h — время падения капли от ветки до тротуара и до высоты шляпы h; V — скорость пешехода.

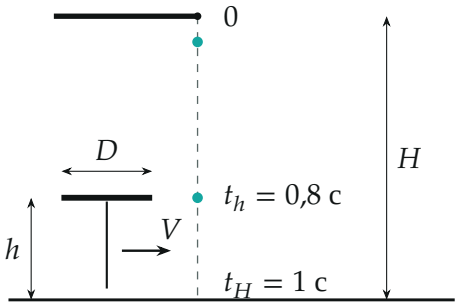


Рис. 1. Капли идут по одной вертикали; шляпа движется на высоте h (масштабы по вертикали и горизонтали разные).

1. Времена падения. Капля падает из состояния покоя с ускорением g, $y = H - gt^2/2$. До тротуара и до высоты шляпы:

$$t_H = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1\text{ с}, \qquad t_h = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3{,}2}{10}} = 0{,}8\text{ с}.$$

От высоты шляпы до тротуара капля летит $t_H - t_h = 0{,}2$ с.

2. Условие для шляпы. Капли проходят высоту h в моменты, отстоящие на τ. Шляпа закрывает вертикаль капель в течение времени D/V — от того, как её передний край дошёл до вертикали, до того, как задний её покинул. Если $D/V > \tau$, то в любой промежуток такой длины попадает момент прохода какой-то капли — она ударит в шляпу. Значит, необходимо

$$\frac{D}{V} \leqslant \tau \quad \Rightarrow \quad V \geqslant \frac{D}{\tau} = \frac{0{,}30}{0{,}5} = 0{,}6\text{ м/с}.$$

При $V = D/\tau$ шляпа проходит линию падения ровно между двумя соседними каплями: капля 1 пролетает уровень шляпы у её переднего края, следующая — у заднего (рис. 2).

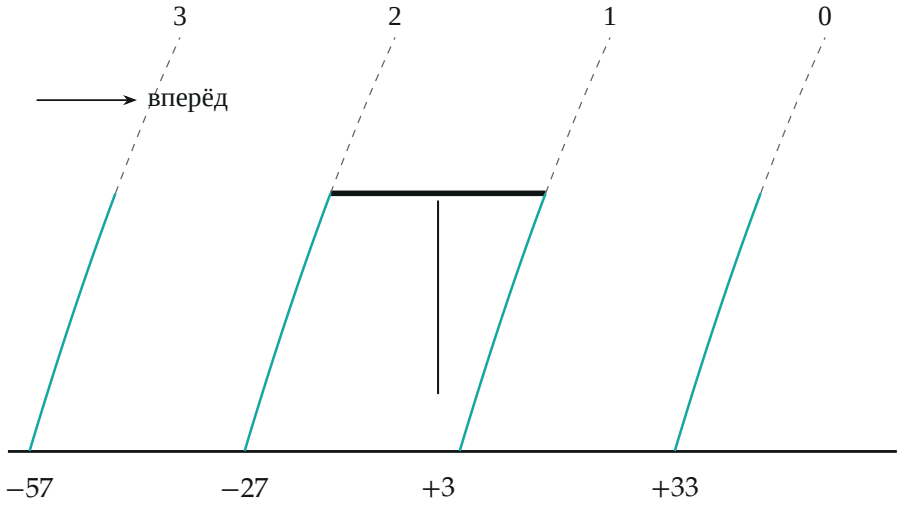


Рис. 2. Траектории капель в системе шляпы (масштабы разные); числа вни-

зу — место приземления относительно центра шляпы, см. Капля 1 проходит у переднего края, капля 2 — у заднего.

3. Вид из системы шляпы. В системе пешехода капли движутся назад со скоростью V и падают вниз. За время τ вертикаль смещается относительно шляпы на $V\tau = D$ — как раз на ширину шляпы. Капля 1 проходит уровень шляпы у переднего края, $x = +D/2 = +15$ см. До тротуара она летит 0,2 с и сместится назад на $V \cdot 0{,}2 = 12$ см, так что упадёт на $+3$ см от центра шляпы. Капля 2 упадёт на -27 см, капля 0 — на $+33$ см.

4. Проверка ботинок. Ботинки точечные и стоят на тротуаре в точках с шагом $L = 60$ см (поочерёдно левый и правый); в крайних положениях они выступают за край шляпы на $(L - D)/2 = 15$ см. Все капли падают в одну точку тротуара P. Выберем фазу шагов так, чтобы в момент приземления капли 1 передний ботинок как раз коснулся земли в точке $P + 27$ см (центр шляпы в этот момент на 3 см позади P, ботинок впереди центра на $L/2 = 30$ см, рис. 3). Тогда ботинки встают в точки $\ldots, P-33, P+27, P+87, \ldots$ см: на расстояниях 27 и 33 см от P и никогда в самой точке P. Значит, ни одна капля в ботинок не попадёт.

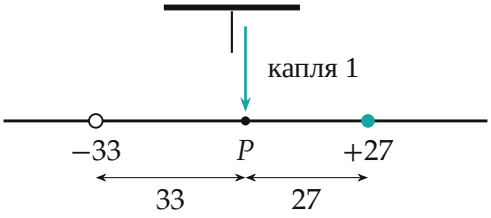


Рис. 3. Тротуар в момент приземления капли 1: ботинок в $P + 27$ см только что встал, другой — в $P - 33$ см отрывается. Расстояния в см.

Обратите внимание. Меньшая скорость не годится именно из-за шляпы: при $V < D/\tau$ время D/V больше τ, и какая-нибудь капля обязательно попадёт в шляпу. Данные H и h нужны только для проверки ботинок (время 0,2 с от шляпы до земли), а сама оценка $V = D/\tau$ от них не зависит.

Проверка. Размерность D/τ — метры в секунду. Предельный случай: при очень малом τ (почти непрерывный дождь) $V \to \infty$ — проскочить

можно только мгновенно, как и должно быть. Смысл: шляпа должна пройти линию падения в «окно» между двумя соседними каплями, а окно открыто на время τ.

Ответ. $V_{\min} = D/\tau = 0{,}6$ м/с.