Куб на пружине в воде

Задача 3. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 3] В сосуде с водой плавает куб массой $m = 2048$ г, он прикреплен ко дну пружиной, другой конец которой прицеплен к центру нижней грани куба. Вначале пружина находится в недеформированном состоянии, а ровно половина куба выступает над водой, причем четыре его ребра вертикальны. Прошел дождь, и уровень воды в сосуде вырос на $h = 20{,}48$ см, а вода оказалась как раз на уровне верхней поверхности куба. Определите удлинение Δl пружины и силу упругости $F_{\text{упр}}$, с которой пружина воздействует на куб. Считайте, что плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Куб плавает в двух состояниях равновесия. В первом пружина свободна, и вес куба уравновешен лишь силой Архимеда — это даёт ребро куба. Во втором куб погружён целиком, сила Архимеда вдвое больше, и избыток держит растянутая пружина, которая тянет куб вниз. Удлинение пружины находим из геометрии: насколько куб сместился относительно дна, когда уровень воды вырос на h.

Обозначения. a — ребро куба, l_0 — длина недеформированной пружины, F_A — сила Архимеда, ось y направлена вверх.

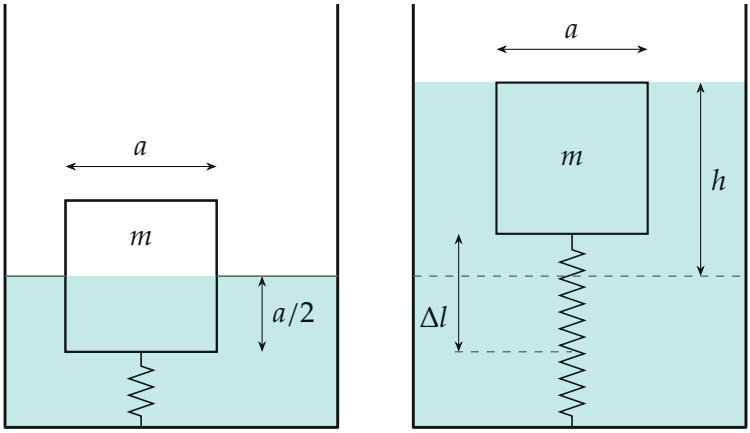


Рис. 1. Слева — до дождя (пружина свободна), справа — после. Штриховая линия справа — прежний уровень воды; её высота над дном $l_0 + a/2$.

1. Ребро куба. В первом состоянии куб покоится, пружина не действует. Второй закон Ньютона в проекции на ось y для куба: сила Архимеда равна весу вытесненной воды, объём погружённой части $a^2 \cdot a/2$:

$$F_{A1} - mg = 0, \qquad \rho_в g \frac{a^3}{2} = mg \;\Rightarrow\; a^3 = \frac{2m}{\rho_в} = 4096 \text{ см}^3, \quad a = 16 \text{ см}.$$

2. Удлинение пружины. В первом состоянии пружина свободна, поэтому нижняя грань куба на высоте l_0 над дном, а уровень воды на $l_0 + a/2$. После дождя вода на высоте $l_0 + a/2 + h$ и совпадает с верхней гранью куба. Если нижняя грань теперь на высоте $l_0 + \Delta l$ (длина пружины $l_0 + \Delta l$), то верхняя на $l_0 + \Delta l + a$. Приравниваем:

$$l_0 + \Delta l + a = l_0 + \frac{a}{2} + h \quad \Rightarrow \quad \Delta l = h - \frac{a}{2} = 20{,}48 - 8 = 12{,}48 \text{ см}.$$

Вода поднялась на h, а куб — только на $\Delta l = h - a/2 < h$: пружина растянулась и не отпустила его вслед за водой.

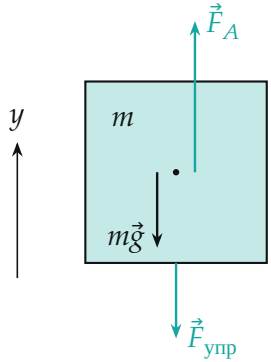


Рис. 2. Силы, действующие на куб во втором состоянии (длины стрелок в масштабе: $F_A = 2mg$, $F_{упр} = mg$).

3. Сила упругости. Во втором состоянии куб погружён целиком, объём вытесненной воды a^3. Растянутая пружина тянет куб вниз, к дну. Равновесие в проекции на ось y (силы по рис. 2):

$$F_{A2} - mg - F_{упр} = 0, \qquad F_{A2} = \rho_в g\, a^3 = 2 \cdot \rho_в g \frac{a^3}{2} = 2mg,$$

где вторая запись использует равенство первого пункта. Отсюда

$$F_{\text{упр}} = 2mg - mg = mg = 2{,}048 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 20{,}48 \text{ Н}.$$

Обратите внимание. Пружина растянута, а не сжата: куб, погружённый целиком, выталкивается вверх с силой $2mg$, пружина его удерживает снизу. Начальная длина пружины l_0 в ответ не входит и не нужна.

Проверка. Размерности: $a^3 = 2m/\rho_{\text{в}}$ — объём, $\Delta l = h - a/2$ — длина, $F = \rho_{\text{в}} g a^3 - mg$ — сила. Жёсткость пружины $k = F_{\text{упр}}/\Delta l = 20{,}48/0{,}1248 \approx 164$ Н/м — разумное значение для такого опыта. Предельный случай: при $h = a/2$ получилось бы $\Delta l = 0$ и $F_{\text{упр}} = 0$ — куб просто поднялся бы вместе с водой, оставаясь погружённым наполовину; для полностью погружённого куба нужен подъём воды больше $a/2$ — пружина обязана растянуться. Смысл: пружина добавляет к весу куба ещё один вес mg, и погружение удваивается.

Ответ. $\Delta l = h - a/2 = 12{,}48$ см; $F_{\text{упр}} = mg = 20{,}48$ Н.