Проточный водонагреватель

Задача 4. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 4] Проточный нагреватель воды состоит из трубы длиной $L = 8$ м, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник размерами $a \times d$. Стенки размерами $L \times a$ сделаны из металла, а размерами $L \times d$ — из диэлектрика. Нагрев воды осуществляется электрическим током, для чего к металлическим стенкам прикладывается постоянное напряжение U. Определите, каким должно быть это напряжение для того, чтобы устройство обеспечивало нагрев $q = 600$ литров воды в час от 10 °C до 35 °C, если $a = 40$ см, $d = 2$ см. Используемая в нагревателе вода имеет следующие характеристики: плотность $\rho = 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C), удельное сопротивление $\lambda = 10$ Ом·м. Теплоемкостью трубы и потерями теплоты пренебречь.

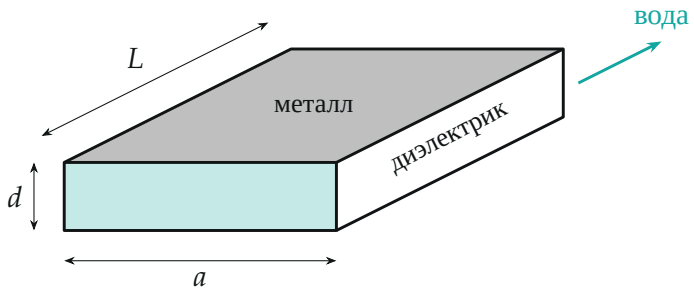


Рис. 1. Труба: верхняя и нижняя стенки (длиной L и шириной a) — металлические электроды, боковые — диэлектрик; нижняя стенка не видна. Масштаб по d условный.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода между металлическими стенками — проводник, по которому ток идёт поперёк трубы, от одной стенки к другой. Выделяющаяся в ней мощность $P = U^2/R$ целиком уходит на нагрев воды, которая течёт сквозь трубу. Так как установка работает в установившемся режиме, мощность нагрева равна теплоте, которую вода уносит за секунду. Приравниваем и находим U.

Обозначения. R — сопротивление воды между электродами, P — мощность тока, μ — масса воды, протекающей за секунду, $\Delta t = 35 - 10 = 25$ °C.

1. Сопротивление. Ток идёт между металлическими стенками, расстояние между которыми d, а площадь каждой, через которую течёт ток, $S = aL$ (рис. 2). Для проводника длиной d и сечением S:

$$R = \lambda\frac{d}{aL} = 10 \cdot \frac{0{,}02}{0{,}40 \cdot 8} = 0{,}0625 \text{ Ом}.$$

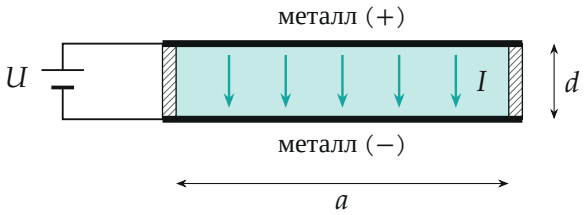


Рис. 2. Сечение трубы $a \times d$ (вид вдоль потока): ток течёт от верхней стенки к нижней по всей длине L через площадь aL.

2. Мощность тока. Напряжение на воде равно U; она вся нагревается током:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2\,aL}{\lambda d}.$$

3. Что нужно воде. За секунду через трубу проходит объём $q = 600$ л/ч $= 600 \cdot 10^{-3}/3600$ м^3/с $\approx 1{,}67 \cdot 10^{-4}$ м^3/с воды, то есть масса $\mu = \rho q = 0{,}167$ кг/с. На нагрев её на Δt за секунду нужна мощность

$$P_{\text{полезн}} = c\,\mu\,\Delta t = c\rho q\,\Delta t = 4200 \cdot 0{,}167 \cdot 25 = 17\,500 \text{ Вт}.$$

4. Баланс мощностей. Теплоёмкость трубы и потери не учитываем, поэтому всё тепло тока достаётся воде:

$$\frac{U^2}{R} = c\rho q\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{c\rho q\,\Delta t \cdot R} = \sqrt{17\,500 \cdot 0{,}0625} \approx 33 \text{ В}.$$

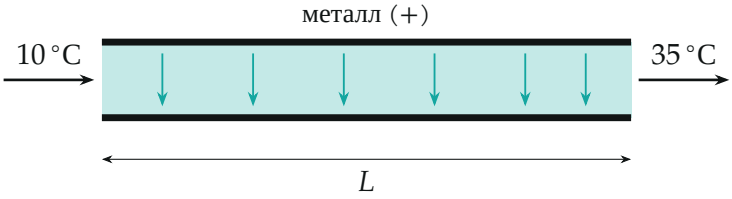


Рис. 3. Вид сбоку: вода протекает вдоль L и нагревается; ток (стрелки) течёт поперёк потока, от верхней стенки к нижней.

Обратите внимание. Сопротивление считаем по расстоянию между электродами d и площади aL, а не по длине трубы: ток течёт поперёк, а не вдоль. Формула $R = \lambda L/S$ с $S = ad$ здесь была бы ошибкой — она относится к току вдоль трубы.

Проверка. Размерность: $\lambda d/(aL)$ — (Ом·м·м)/м^2 = Ом; $c\rho q\Delta t$ — мощность, $\sqrt{\text{Вт} \cdot \text{Ом}}$ = В. Сила тока $I = P/U = 17\,500/33 \approx 530$ А; $IR = 33$ В — сходится. Мощность 17,5 кВт на 0,17 л воды в секунду при 25 градусах — как у мощного проточного нагревателя. Смысл: чем уже зазор d и больше площадь aL, тем меньше сопротивление и тем меньше нужное напряжение.

Ответ. $U = \sqrt{c\rho q\,\Delta t\,\lambda d/(aL)} \approx 33$ В.