Геодезическая ракета и звук двигателя

Задача 5. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 5] Геодезическая ракета стартует по вертикали и движется с ускорением $a = 50$ м/с^2. Через некоторое время происходит отсечка (прекращение работы) двигателя. Звук на земле в точке старта перестал быть слышен спустя время $\tau = 1$ мин 55,5 с после старта. Какую скорость V приобрел установленный на ракете исследовательский зонд к моменту отключения двигателя? На какую максимальную высоту H он поднимется? Скорость звука принять равной $c = 330$ м/с, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха и изменением величины g с высотой пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Движение ракеты состоит из двух этапов: разгон с ускорением a при работающем двигателе и свободный полёт с ускорением g вниз после отсечки. Звук двигателя идёт вниз с постоянной скоростью c. На земле он слышен, пока доходят звуки, излучённые до отсечки. Значит, последний услышанный звук — тот, что излучён в момент отсечки с высоты разгона. Его время в пути и даёт связь между временем τ и временем работы двигателя.

Обозначения. t_1 — время работы двигателя, h_1 — высота отсечки, V — скорость в момент отсечки, $\tau = 115{,}5$ с — время от старта до тишины на земле. Ось y вверх, начало — точка старта, $t = 0$ — старт.

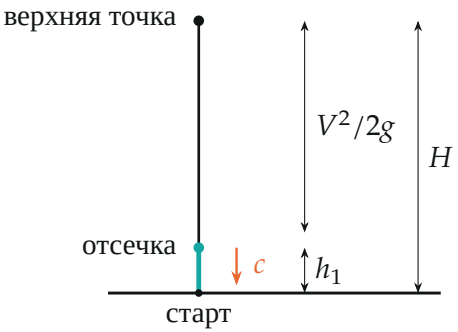


Рис. 1. Этапы подъёма (h_1 в 5 раз меньше $V^2/2g$, как в задаче). Бирюзовая часть — работа двигателя; стрелка c — последний звук.

1. Разгон. При работающем двигателе $v = at$, $y = at^2/2$. В момент отсечки $t = t_1$:

$$V = at_1, \qquad h_1 = \frac{at_1^2}{2}.$$

2. Время тишины. Звук, излучённый в момент t с высоты $y(t) = at^2/2$, приходит на землю в момент $t + y/c$. Последним излучается звук в момент t_1, на землю он придёт в

$$\tau = t_1 + \frac{h_1}{c} = t_1 + \frac{at_1^2}{2c}.$$

После отсечки звук не излучается, а излучённые раньше пришли раньше: время прихода $t + at^2/2c$ растёт с t (производная $1 + at/c > 0$), даже когда ракета летит быстрее звука.

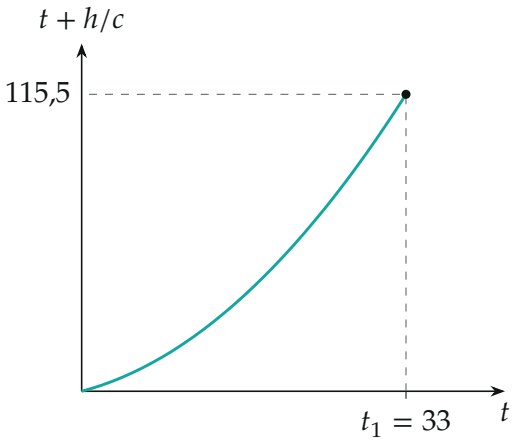


Рис. 2. Момент прихода звука на землю в зависимости от момента излучения (секунды). Кривая заканчивается в точке отсечки.

3. Время работы двигателя. Уравнение $\frac{a}{2c}t_1^2 + t_1 - \tau = 0$ с положительным корнем

$$t_1 = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2a\tau}{c}} - 1\right).$$

Здесь $2a\tau/c = 2{\cdot}50{\cdot}115{,}5/330 = 35$, корень равен 6, и $t_1 = \dfrac{330}{50}(6-1) =$ 33 с.

4. Скорость при отсечке.

$$V = at_1 = c\left(\sqrt{1+\frac{2a\tau}{c}} - 1\right) = 330 \cdot 5 = 1650 \text{ м/с}.$$

Высота отсечки $h_1 = at_1^2/2 = 50 \cdot 33^2/2 = 27\,225$ м.

5. Подъём после отсечки. Двигатель выключен, на зонд действует только сила тяжести: y-проекция ускорения $-g$. Скорость падает до нуля за $V/g = 165$ с, зонд поднимается ещё на

$$\Delta h = \frac{V^2}{2g} = \frac{1650^2}{20} = 136\,125 \text{ м}.$$

Максимальная высота

$$H = h_1 + \frac{V^2}{2g} = 27\,225 + 136\,125 = 163\,350 \text{ м} \approx 163{,}35 \text{ км}.$$

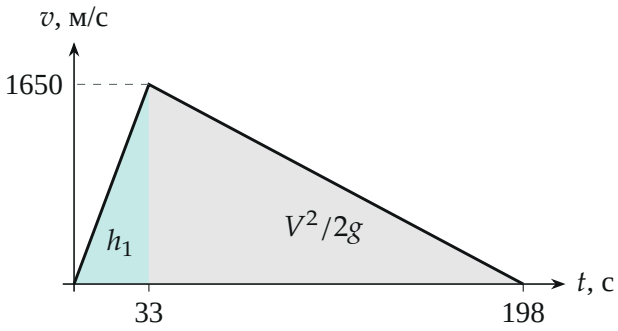


Рис. 3. Скорость зонда: разгон до отсечки (бирюзовая площадь h_1), затем торможение силой тяжести (серая площадь $V^2/2g$). Вся площадь равна H.

Обратите внимание. Время дано в минутах и секундах: 1 мин 55,5 с = 115,5 с. После отсечки ракета не останавливается, а летит дальше по

инерции, поэтому $H > h_1$ в несколько раз. Звук, излучённый до отсечки, обгоняет ракету: она сверхзвуковая уже с $t = c/a = 6{,}6$ с, но звук всё равно идёт вниз и без помех доходит до земли.

Проверка. Размерность: $c\cdot$(безразмерное) — скорость. Второй способ для H: площадь под графиком скорости (рис. 3) — треугольник с основанием 198 с и высотой 1650 м/с: $198 \cdot 1650/2 = 163\,350$ м. Предел $c \to \infty$ (мгновенный звук): $V \to a\tau = 5775$ м/с — получается, что реальная скорость меньше, потому что часть времени τ звук идёт вниз ($t_1 = 33$ с против 115,5 с). Смысл: пока ракета разгонялась 33 с, последний звук шёл вниз ещё 82,5 с.

Ответ. $V = c\left(\sqrt{1 + 2a\tau/c} - 1\right) = 1650$ м/с; $H = h_1 + V^2/2g = 163{,}35$ км.