Набор высоты самолётом

Задача 6. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 6] Успешный бизнесмен Иван Михайлович решил порадовать свое подрастающее чадо поездкой на Новый год в теплые страны, куда полет на самолете занимал долгие 8 часов. Пока самолет набирал высоту, папа рассказывал сыну,

что расход топлива их самолета при взлете равен 14040 кг/ч, и эта величина больше, чем при полете на неизменной высоте с постоянной скоростью;

что КПД двигателей на взлете составляет примерно 12%;

что самолет оснащен четырьмя двигателями с силой тяги по 127,4 кН каждый;

что масса полностью загруженного и заправленного самолета равна 208 тоннам;

и, наконец, что удельная теплота сгорания авиационного топлива равна 43 МДж/кг.

Повествование прервалось сообщением пилота о том, что самолет движется на высоте 8230 м со скоростью 936 км/ч. Уставший Иван Михайлович заключил: «А теперь, сынок, чтобы не расслабляться от учебы раньше времени и не скучать, выбери необходимые данные из тех, которые я тебе сообщил, и посчитай, сколько секунд продолжался набор высоты самолета». Помогите сыну Ивана Михайловича справиться с заданием папы.

Уменьшением массы самолета за время взлета можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Двигатели сжигают топливо, и 12% выделившейся теплоты превращается в механическую энергию самолёта: он набирает скорость и высоту. Остальные 88% уходят в тепло. Нас спрашивают о времени. Значит, надо найти, какая механическая энергия нужна для подъёма на 8230 м с разгоном до 936 км/ч, и сколько времени двигателям нужно сжигать топливо, чтобы 12% его теплоты дали эту энергию. Из пяти чисел папы нужны не все: сила тяги и длительность перелёта лишние.

Обозначения. $m = 208$ т — масса самолёта; $\mu = 14\,040$ кг/ч $= 3{,}9$

кг/с — расход топлива; $q = 43$ МДж/кг — удельная теплота сгорания; $\eta = 0{,}12$ — КПД; $H = 8230$ м; $v = 936$ км/ч $= 260$ м/с; t — время набора высоты. Начало отсчёта энергии — старт с земли, где самолёт покоится.

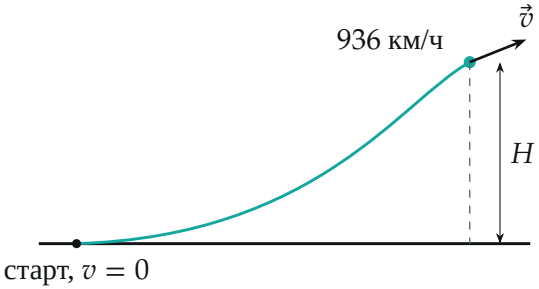


Рис. 1. Набор высоты: от старта с нулевой скоростью до высоты H со скоростью v.

1. Что получил самолёт. Приращение механической энергии равно сумме кинетической и потенциальной:

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} + mgH = \frac{m\,(v^2 + 2gH)}{2}.$$

Числа: $v^2 = 67\,600$ м^2/с^2, $2gH = 164\,600$ м^2/с^2, сумма $232\,200$ м^2/с^2, и

$$\Delta E = \frac{208\,000 \cdot 232\,200}{2} = 2{,}415 \cdot 10^{10}\ \text{Дж}.$$

2. Что дало топливо. За время t сгорает масса топлива μt, при этом выделяется теплота $Q = q\mu t$. Определение КПД: полезная часть ηQ идёт на прирост механической энергии:

$$\eta\, q\, \mu\, t = \Delta E = \frac{m(v^2 + 2gH)}{2}.$$

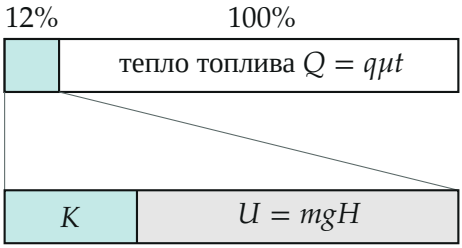


Рис. 2. Куда идёт энергия: 12% теплоты топлива становится механической энергией самолёта; она делится на кинетическую $K = mv^2/2$ (29%) и потенциальную $U = mgH$ (71%).

3. Время.

$$t = \frac{m\,(v^2 + 2gH)}{2\,\eta\,q\,\mu} = \frac{2{,}415 \cdot 10^{10}}{0{,}12 \cdot 43 \cdot 10^6 \cdot 3{,}9} = \frac{2{,}415 \cdot 10^{10}}{2{,}012 \cdot 10^7} = 1200 \text{ с}.$$

Это 20 минут.

Обратите внимание. Сила тяги и время перелёта в 8 часов в решение не входят. Работа тяги равнялась бы $F\,s$, но путь по траектории и сопротивление воздуха нам неизвестны; поэтому полезную энергию находим через η и топливо, а нужное — через изменение энергии самолёта. Нужен именно взлётный расход топлива: на постоянной высоте он меньше, и в задаче сказано, что дан расход при взлёте.

Проверка. Размерность: $m\,v^2$ — джоули, $\eta q \mu$ — джоули в секунду, отношение — секунды. За 1200 с сгорает $3{,}9 \cdot 1200 = 4680$ кг топлива — 2,3% массы самолёта, так что пренебрегать изменением массы можно, как сказано в условии. Мощность полезная $\eta q \mu = 20$ МВт, средний набор высоты $8230/1200 \approx 7$ м/с — разумная скороподъёмность. Смысл: самолёт «платит» за каждый джоуль набора высоты и скорости примерно 8 джоулями топлива.

Ответ. $t = \dfrac{m(2gH + v^2)}{2q\mu\eta} = 1200$ с.