Сосульки в медном кувшине

Задача 7. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 7] У джентльмена дома стоит большой медный кувшин массой $M_0 = 500$ кг и внутренним объемом $V = 1$ м^3. Джентльмен снял с края крыши сосульки, уже начавшие таять, положил их в кувшин, подождал, пока кувшин охладится до 0 °C, и наполнил его до краев кипятком температурой 100 °C. Через некоторое время уровень воды в кувшине опустился, и джентльмен влил в него ещё 40 л кипятка, снова наполнив кувшин до краёв. После этого уровень воды в кувшине уже не менялся. Определите установившуюся в кувшине температуру. Температура в комнате 20 °C. Теплообменом кувшина с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3; удельные теплоемкости воды и меди составляют $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C) и $c_м = 385$ Дж/(кг·°C) соответственно, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс с фазовым переходом. Сначала медный кувшин, стоявший в комнате при 20 °C, охлаждается льдом до 0 °C и по пути растапливает немного льда. Затем кувшин доверху заливают кипятком, лёд плавится, и уровень опускается: объём льда больше объёма воды из него. Это опускание — ключ: по нему находим массу растаявшего льда, а по ней — массу кипятка. Уровень не менялся после доливки, значит, весь лёд к тому времени растаял. Дальше составляем общее уравнение теплового баланса.

Обозначения. m_1 — масса льда, растаявшего из-за охлаждения кувшина; M — масса льда, растаявшего от кипятка; $m_к$ — масса первой порции кипятка; $\Delta V = 40$ л $= 0{,}04$ м^3 — объём доливки; t — конечная температура; T_1 — температура после первого этапа.

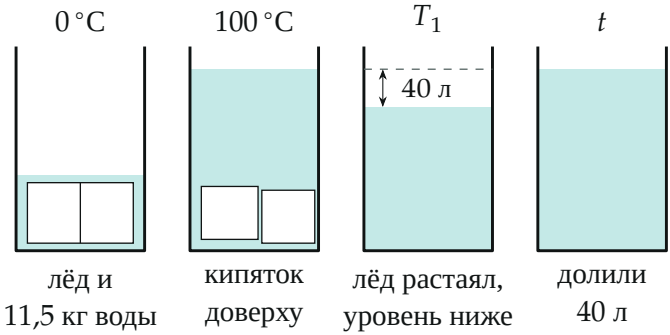


Рис. 1. Четыре состояния кувшина (масштаб условный): лёд после охлаждения меди; кипяток доверху; после таяния всего льда; после доливки 40 л.

1. Первый этап: охлаждение меди. Кувшин остывает от 20 до 0 °C и отдаёт льду теплоту, которая плавит часть льда:

$$c_м M_0 \cdot 20 = \lambda m_1 \;\Rightarrow\; m_1 = \frac{385 \cdot 500 \cdot 20}{335\,000} = 11{,}5 \text{ кг}.$$

Эта вода при 0 °C остаётся в кувшине; кувшин и вся смесь — при 0 °C.

2. Масса льда, растаявшего от кипятка. Из льда массой M получается вода той же массы M, но меньшего объёма: объём уменьшается на $M\left(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}\right)$. После доливки уровень не меняется, а значит, никакого льда в кувшине больше нет (иначе кипяток растопил бы ещё лёд, и уровень снова упал). Поэтому убыль объёма до доливки равна ΔV и весь лёд растаял:

$$M\left(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}\right) = \Delta V \;\Rightarrow\; M = \frac{0{,}04}{1/900 - 1/1000} = 360 \text{ кг}.$$

3. Масса первого кипятка. Кувшин был заполнен целиком: лёд M, вода m_1 и кипяток $m_к$ вместе занимали $V = 1$ м^3:

$$\frac{M}{\rho_л} + \frac{m_1 + m_к}{\rho_в} = V \;\Rightarrow\; m_к = \rho_в V - \frac{\rho_в}{\rho_л} M - m_1,$$

$$m_к = 1000 - 400 - 11{,}5 = 588{,}5 \text{ кг}.$$

Проверим, что лёд действительно растаял целиком: после первого этапа

$$m_к c_в (100 - T_1) = \lambda M + (M + m_1) c_в T_1 + c_м M_0 T_1 \;\Rightarrow\; T_1 \approx 30\,^\circ\text{C} > 0.$$

Это подтверждает, что кипятка хватило, чтобы растопить весь лёд.

4. Общий тепловой баланс. После доливки в кувшине 1000 кг воды (объём V) и медь при общей температуре t. Отдали теплоту обе порции кипятка, общей массой $m_к + \rho_в \Delta V = 628{,}5$ кг. Получили: лёд на плавление λM, вся вода, которая была холодной ($M + m_1 = 371{,}5$ кг), нагрелась от 0 до t, медь тоже нагрелась от 0 до t:

$$c_в (m_к + \rho_в \Delta V)(100 - t) = \lambda M + c_в (M + m_1)\, t + c_м M_0\, t.$$

Переносим члены с t влево, учитывая, что $m_к + \rho_в \Delta V + M + m_1 = \rho_в V = 1000$ кг:

$$t = \frac{100\, c_в (m_к + \rho_в \Delta V) - \lambda M}{c_в \rho_в V + c_м M_0} = \frac{263{,}97 \cdot 10^6 - 120{,}6 \cdot 10^6}{4{,}2 \cdot 10^6 + 0{,}1925 \cdot 10^6} \approx 32{,}6\,^\circ\text{C}.$$

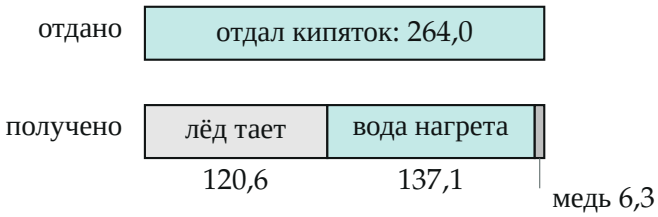


Рис. 2. Тепловой баланс (МДж): всё, что отдал кипяток, пошло на плавление льда (120,6), нагрев воды (137,1) и меди (6,3).

Обратите внимание. Три ловушки. Первая: комнатная температура 20 °C нужна только на первом этапе — чтобы найти m_1; дальше кувшин при 0 °C, а потери в окружающую среду нулевые. Вторая: 40 л — это убыль объёма, а не масса растаявшего льда; масса льда 360 кг. Третья: в итоговом уравнении от 0 °C греется не только вода m_1, но и вода, получившаяся изо льда (M), — всего 371,5 кг; остальные 628,5 кг (кипяток) остывают от 100 °C.

Проверка. Баланс по рис. 2: $120{,}6+137{,}1+6{,}3 = 264{,}0$ МДж — равно отданному. Температура между 0 и 100 °C; лёд забрал около 46% тепла кипятка, поэтому t заметно ниже 50 °C. Размерность: числитель — Дж, знаменатель — Дж/°C.

Ответ. $t \approx 32{,}6$ °C.