Три вольтметра

Задача 8. [МОШ 2013/14, 9 класс, задача 8] Два одинаковых вольтметра соединили параллельно, третий вольтметр подключили к этой комбинации последовательно, и к концам получившейся цепи присоединили идеальную батарейку. При этом вольтметры показывают 4 В, 4 В и 5 В. Какое напряжение у батарейки? Могут ли быть одинаковыми все три вольтметра? Что покажут эти же приборы, если их все соединить последовательно и подключить к той же батарейке? Показания приборов считайте точными.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вольтметр — это резистор с конечным сопротивлением; его показание — напряжение на нём, а ток через него идёт по закону Ома. Значит, всю цепь можно считать цепью из трёх резисторов. Параллельная пара одинаковых резисторов находится под одним и тем же напряжением; третий резистор включён последовательно, и напряжения на последовательных участках складываются в напряжение батарейки. Из отношения напряжений находим отношение сопротивлений, а оно решает остальные вопросы.

Обозначения. R — сопротивление каждого из двух одинаковых вольтметров, r — сопротивление третьего, $\mathcal{E}$ — напряжение батарейки (она идеальная, внутреннего сопротивления нет), I_1, I_2, I_3 — токи через вольтметры.

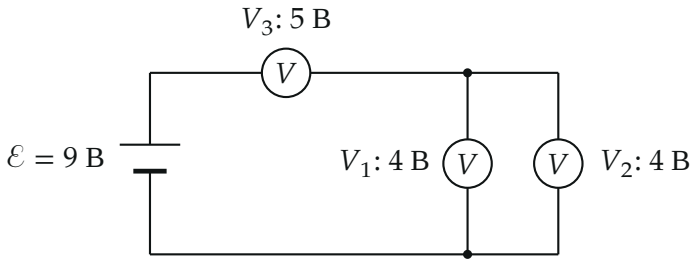


Рис. 1. Исходная схема: V_1 и V_2 параллельно, V_3 последовательно с ними.

1. Кто что показывает; напряжение батарейки. Приборы V_1 и V_2 включены параллельно, поэтому на них одно и то же напряжение. Из

показаний 4, 4 и 5 В равны только два: это параллельная пара, а 5 В показывает третий прибор V_3 (рис. 1). Напряжение батарейки равно сумме напряжений на последовательных участках: на V_3 и на параллельной паре:

$$\mathcal{E} = U_3 + U_{12} = 5 + 4 = 9 \text{ В}.$$

2. Отношение сопротивлений. Закон сохранения заряда для узла: весь ток через V_3 разветвляется на два тока через V_1 и V_2, $I_3 = I_1 + I_2$. По закону Ома $I = U/R$:

$$\frac{5}{r} = \frac{4}{R} + \frac{4}{R} = \frac{8}{R} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5}{8}R.$$

Третий вольтметр имеет сопротивление, в $8/5$ раза меньшее, чем у двух других.

3. Могут ли все три быть одинаковыми. Нет. При $r = R$ параллельная пара имела бы сопротивление $R/2$, то есть вдвое меньше, чем у третьего, и напряжение 9 В разделилось бы в отношении 1 : 2: на паре 3 В, на третьем 6 В. Приборы показали бы 3, 3 и 6 В, а не 4, 4 и 5.

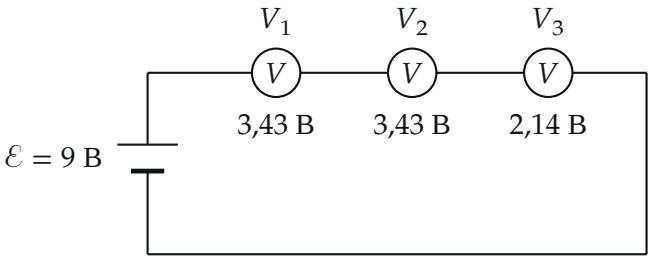


Рис. 2. Последовательное соединение: ток один, напряжения делятся пропорционально сопротивлениям.

4. Последовательное соединение. Сопротивления складываются: $R_{\text{общ}} = R + R + r = \frac{21}{8}R$. Один и тот же ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}}} = \frac{9}{21R/8} = \frac{24}{7R}.$$

Показания приборов $U = IR$:

$$U_1 = U_2 = IR = \frac{24}{7} \approx 3{,}43\ \text{В}, \qquad U_3 = Ir = \frac{24}{7R} \cdot \frac{5R}{8} = \frac{15}{7} \approx 2{,}14\ \text{В}.$$

Обратите внимание. Вольтметры не идеальные: у идеального вольтметра сопротивление бесконечно, тока в цепи не было бы, и напряжения на втором и третьем приборах определить было бы нечем. В задаче ток идёт через приборы, и именно поэтому показания 4, 4 и 5 В связаны с сопротивлениями.

Проверка. Сумма показаний: $2 \cdot \frac{24}{7} + \frac{15}{7} = \frac{63}{7} = 9$ В — равна $\mathcal{E}$. Для начальной схемы при $R = 1$, $r = 0{,}625$: сопротивление пары 0,5, общее 1,125, ток 8, на V_3 5 В, на паре 4 В — сходится. Смысл: чем меньше сопротивление прибора, тем меньше он показывает при последовательном соединении, поэтому третий, «лёгкий», показывает меньше.

Ответ. $\mathcal{E} = 9$ В; одинаковыми быть не могут ($r = 5R/8$); последовательно: 3,43 В, 3,43 В и 2,14 В (третий — меньше).