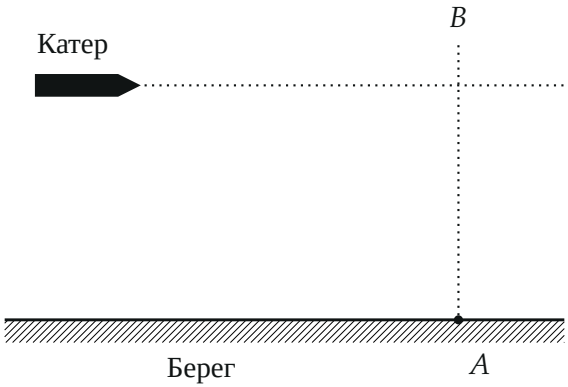
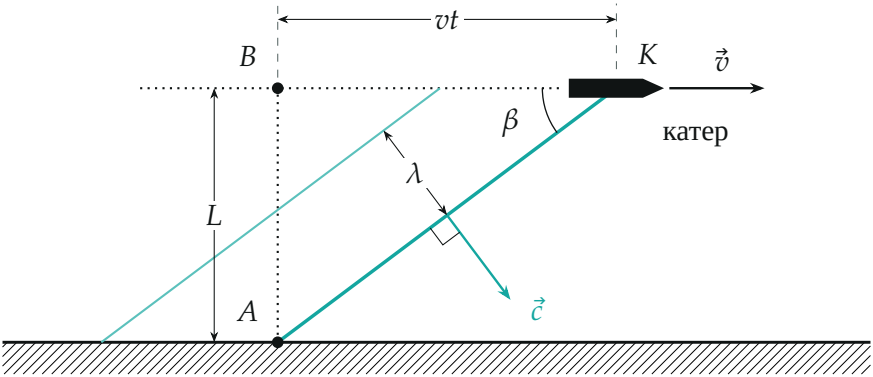
Волны от катера у берега

Задача 1. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 1] По спокойной поверхности озера плывёт маленький катер, траектория которого параллельна прямой линии берега и лежит от него на расстоянии L. Стоящий в точке A наблюдатель увидел, что первая волна от катера достигла точки A спустя время t после того, как катер пересёк прямую AB, перпендикулярную берегу (см. рис). После этого волны ударяли о берег в этом месте с периодом T. Расстояние между соседними гребнями волн равно λ. Найдите скорость катера.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Катер плывёт быстрее волн, которые он создаёт. Поэтому волны не разбегаются от него кругами, а вытягиваются в прямые гребни, которые тянутся от катера к берегу и движутся вместе с ним, не меняя формы. Берегу они приходят друг за другом, и точка A видит их с периодом T. Нужно связать три вещи: скорость волны c через λ и T, угол гребня с курсом через c и v и тот же угол через геометрию L и t; из них неизвестная v находится.

Обозначения. v — скорость катера, c — скорость волны относительно воды (гребень движется перпендикулярно самому себе), K — положение катера в момент t, когда первая волна дошла до A, B — точка, где катер пересёк прямую AB (по условию, в момент 0), β — угол между линией гребня и курсом катера.



Первый гребень (жирная линия) идёт от катера K к точке A; следующий гребень (тонкая линия) отстоит от него на λ по нормали

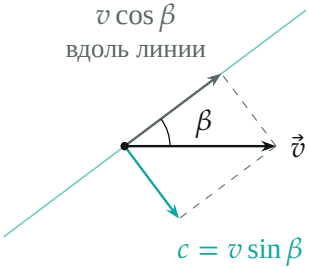
1. Скорость волны. Гребень движется перпендикулярно самому себе со скоростью c, расстояние между соседними гребнями (по нормали) равно λ. Точка A неподвижна, и следующий гребень проходит её через время T, за которое он проходит путь λ:

$$c = \frac{\lambda}{T}.$$

2. Фронт и катер. Вся картина гребней неподвижна относительно катера и вместе с ним сдвигается со скоростью $\vec{v}$. Рассмотрим малый промежуток времени dt: катер смещается на $v\,dt$ вдоль курса. Линия гребня вместе с ним переходит на новое место, но сдвигом вдоль самой линии ничего не меняется: линия остаётся той же прямой. Значит, настоящее смещение линии — это проекция смещения катера на нормаль к линии, и оно равно смещению гребня за то же время, то есть $c\,dt$. Нормаль составляет с курсом угол $90° - \beta$, поэтому проекция $v\,dt\,\sin\beta$:

$$v\,dt\,\sin\beta = c\,dt \quad \Rightarrow \quad c = v\sin\beta.$$

Для этого нужно $v > c$ — катер быстрее волн, иначе фронта нет.



Скорость катера раскладывается вдоль линии гребня и по нормали к ней: линию сдвигает только составляющая $v\sin\beta$

3. Угол из геометрии. Гребень в момент t проходит через катер K и через точку A — по условию, первая волна достигла A ровно в этот момент. Треугольник ABK прямоугольный: $AB = L$, $BK = vt$ (катер плыл от B до K в течение t), $AK = \sqrt{L^2 + v^2t^2}$. Угол β лежит при вершине K против катета AB:

$$\sin\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + v^2t^2}}.$$

4. Собираем. Подставляем в $c = v\sin\beta$ значения $c = \lambda/T$ и $\sin\beta$:

$$\frac{vL}{\sqrt{L^2 + v^2t^2}} = \frac{\lambda}{T}.$$

Единственная неизвестная — v. Возводим в квадрат: $v^2L^2T^2 = \lambda^2\left(L^2 + v^2t^2\right)$, откуда $v^2\left(L^2T^2 - \lambda^2t^2\right) = \lambda^2L^2$ и

$$v = \frac{\lambda L}{\sqrt{L^2T^2 - \lambda^2t^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}}.$$

Корень существует при $T > \lambda t/L$ — это и есть условие $v > c$.

Второй способ. Гребни наклонены к берегу (к курсу) под углом β, поэтому соседние гребни выходят на берег в точках, отстоящих друг от друга вдоль берега на $\lambda/\sin\beta$ (а λ — расстояние между гребнями по перпендикуляру). Эти точки едут вдоль берега вместе с катером со ско-

ростью v, значит следующий гребень придёт в A через $T = \lambda/(v\sin\beta)$, то есть $v\sin\beta = \lambda/T$ — то же уравнение, что в пунктах 1–2, но без разговора о проекции на нормаль.

Обратите внимание. Расстояние λ — между гребнями по нормали, а вдоль берега гребни стоят дальше: $\lambda/\sin\beta$. Ответ не содержит скорости волны c: она вспомогательная.

Проверка. Размерность: λ/T — скорость, $\lambda t/L$ — время. Предел $t \to 0$: гребень, прошедший через катер в момент 0, уже у A, значит фронт перпендикулярен курсу ($\beta = 90°$), и $v = \lambda/T = c$: катер идёт со скоростью волны. Числа: $L = 300$ м, $v = 5$ м/с, $t = 80$ с: $\sin\beta = 300/500 = 0{,}6$, $c = 3$ м/с; при $\lambda = 30$ м период $T = 10$ с, и формула даёт $30/\sqrt{100-64} = 5$ м/с, как и должно быть.

Ответ. $v = \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}}$.