Бусинка на вертикальном кольце

Задача 2. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 2] В вертикальной плоскости закреплено круглое кольцо радиусом R, на которое в верхней точке надета бусинка массой m. После небольшого толчка бусинка начинает соскальзывать вниз по кольцу под действием силы тяжести. Всеми силами трения можно пренебречь.

1. С какой силой бусинка давит на кольцо в точке, лежащей на его горизонтальном диаметре?
2. Чему равен модуль импульса бусинки в момент, когда она не давит на кольцо?

▲ **Решение. Что происходит.** Бусинка надета на кольцо, поэтому кольцо может толкать её и наружу, и внутрь: сила реакции $\vec{N}$ направлена вдоль радиуса, а её проекция на радиус может быть любого знака. Кольцо гладкое, значит $\vec{N}$ перпендикулярна скорости и работы не совершает: скорость на любой высоте даёт закон сохранения энергии. Сама сила $\vec{N}$ входит во второй закон Ньютона для движения по окружности. Вопрос «не давит на кольцо» означает $N = 0$ в этой точке.

Обозначения. Ось n направляем из бусинки к центру кольца O: вдоль неё лежит центростремительное ускорение $a_n = v^2/R$, и тогда сила тяжести (вертикальная) даёт в уравнение только свою проекцию, а проекция N_n силы реакции остаётся одной неизвестной. Положение бусинки задаём углом φ между радиусом на бусинку и вертикалью (в начале $\varphi = 0$). Бусинка опустилась на $h = R(1 - \cos\varphi)$.

Пункт 1. Горизонтальный диаметр: $\varphi = 90°$, бусинка опустилась на $h = R$.

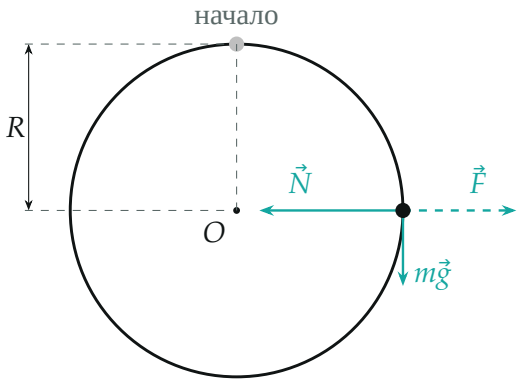
1. Скорость. Закон сохранения механической энергии для бусинки между верхней точкой (скорость мала, ею пренебрегаем) и точкой на горизонтальном диаметре: сила $\vec{N}$ перпендикулярна скорости и работы не совершает, трения нет.

$$mgR = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR.$$

2. Второй закон Ньютона. Векторно: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Проецируем на ось n, направленную к центру (по горизонтали): сила тяжести вертикальна, её проекция на ось n равна нулю, остаётся только реакция.

$$\frac{mv^2}{R} = N_n \quad \Rightarrow \quad N_n = \frac{m \cdot 2gR}{R} = 2mg.$$

Проекция положительна: кольцо толкает бусинку к центру. По третьему закону Ньютона бусинка давит на кольцо с силой $F = N_n = 2mg$, направленной от центра по радиусу.



Бусинка на горизонтальном диаметре: $\vec{N}$ — сила кольца на бусинку, $\vec{F} = -\vec{N}$ — сила бусинки на кольцо

Пункт 2. Теперь бусинка в произвольной точке, угол φ ещё неизвестен: найдём, при каком φ реакция обращается в нуль.

3. Скорость в произвольной точке. Тот же закон сохранения энергии, теперь с опусканием $h = R(1 - \cos\varphi)$:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR(1 - \cos\varphi).$$

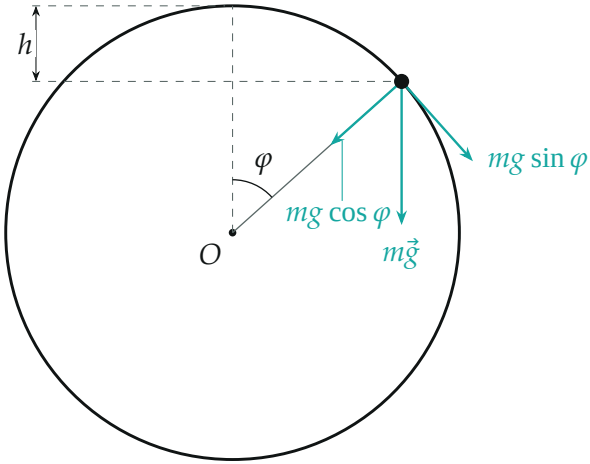
4. Второй закон Ньютона на ось n. Ось n идёт к центру, сила тяжести составляет с ней угол φ, её проекция $mg\cos\varphi$ (для $\varphi < 90°$ она направлена к центру):

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\varphi + N_n.$$

Подставляем v^2 и получаем реакцию как функцию угла:

$$N_n = 2mg(1 - \cos\varphi) - mg\cos\varphi = mg\,(2 - 3\cos\varphi).$$

При $\varphi = 90°$ это $2mg$, как в пункте 1.



Сила тяжести в точке φ: радиальная составляющая $mg\cos\varphi$ направлена к центру, тангенциальная $mg\sin\varphi$ разгоняет бусинку

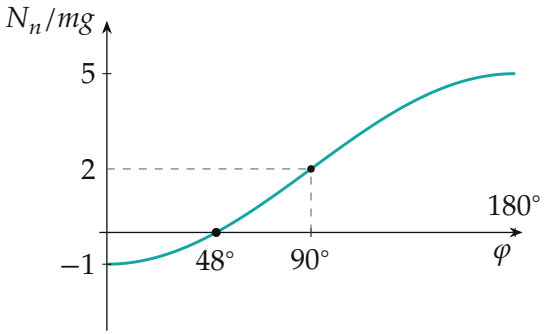
5. Бусинка не давит. Условие $N_n = 0$:

$$2 - 3\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{2}{3}, \qquad \varphi \approx 48°.$$

Тогда $v^2 = 2gR\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2gR}{3}$: в этот момент вся центростремительная сила — проекция силы тяжести ($mg\cos\varphi = mv^2/R$), и реакции не нужно.

6. Импульс.

$$p = mv = m\sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$



Реакция кольца (в единицах mg) как функция угла: отрицательна при $\varphi < 48°$ (кольцо толкает бусинку от центра), нуль — при $\varphi \approx 48°$

Обратите внимание. Реакция при $\varphi < 48°$ отрицательна: кольцо толкает бусинку *от* центра (на самой вершине $N_n = -mg$: кольцо держит бусинку, как опора). Бусинка надета на кольцо и не отрывается, как оторвался бы шарик на выпуклой поверхности: при $\varphi = 48°$ реакция просто меняет знак, и бусинка начинает прижиматься к другой стороне кольца. Вопрос «не давит» — это ровно момент смены знака.

Проверка. Размерность: $2mg$ — сила, $m\sqrt{gR}$ — импульс. Крайние значения формулы $N_n = mg(2 - 3\cos\varphi)$: на вершине $-mg$ (бусинка покоится, кольцо держит её силой mg вверх), в нижней точке $5mg = mg + mv^2/R$ при $v^2 = 4gR$ — как у груза на нити в нижней точке.

Ответ. 1) $F = 2mg$, сила направлена по радиусу от центра кольца; 2) $p = m\sqrt{\dfrac{2}{3}gR}$.