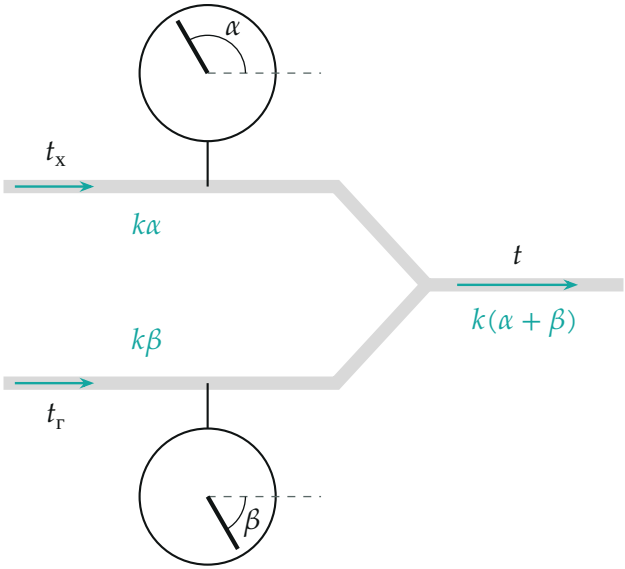
Смеситель с двумя кранами

Задача 3. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 3] На водопроводном смесителе установлены два крана — холодный и горячий. Краны одинаковы по своей конструкции — она такова, что количество воды, протекающее через каждый кран за одну секунду, пропорционально углу поворота крана при его открывании. Если повернуть холодный кран на угол $\alpha_1 = 180°$, а горячий кран — на угол $\beta_1 = 60°$, из крана потечёт вода температурой $t_1 = 36$ °C. Если же повернуть холодный кран на угол $\alpha_2 = 120°$, а горячий кран — на угол $\beta_2 = 90°$, то из крана потечёт вода температурой $t_2 = 48$ °C. Найдите температуру воды, текущей из крана, когда холодный кран повёрнут на угол $\alpha_3 = 160°$, а горячий кран повёрнут на угол $\beta_3 = 80°$. Потерями теплоты в смесителе пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** В смесителе встречаются два потока: холодная вода из трубы с температурой $t_\text{х}$ и горячая с температурой $t_\text{г}$. Ни $t_\text{х}$, ни $t_\text{г}$ в условии не даны — это два неизвестных, и два опыта дают ровно два уравнения для них. Класс задачи — тепловой баланс смешения без потерь: сколько тепла отдала горячая вода, столько получила холодная. Расход каждого крана пропорционален углу, поэтому в балансе массы можно заменить углами.

Обозначения. Расход (масса воды в секунду) через кран, повёрнутый на угол φ, равен $k\varphi$; коэффициент k один, потому что краны одинаковы. Холодный кран повёрнут на угол α, горячий — на β; c — удельная теплоёмкость воды, t — температура смеси.



Смеситель: расход холодной воды $kα$, горячей $kβ$, температура смеси t

1. Тепловой баланс для малого промежутка времени. За малое время dt через холодный кран проходит масса $dm_х = kα\,dt$, через горячий — $dm_г = kβ\,dt$. Холодная вода нагревается от $t_х$ до t, горячая остывает от $t_г$ до t; потерь нет, значит, тепло, полученное холодной водой, равно теплу, отданному горячей:

$$c\,kα\,dt\,(t - t_х) = c\,kβ\,dt\,(t_г - t).$$

Величины c, k и dt сокращаются — именно поэтому ответ не зависит от устройства кранов, а только от углов:

$$α\,(t - t_х) = β\,(t_г - t) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{α\,t_х + β\,t_г}{α + β}.$$

Температура смеси — среднее $t_х$ и $t_г$ с весами $α$ и $β$.

2. Два опыта — два уравнения для $t_х$ и $t_г$. Подставляем $α_1 = 180°$, $β_1 = 60°$, $t_1 = 36$ °C и $α_2 = 120°$, $β_2 = 90°$, $t_2 = 48$ °C в форму

$\alpha(t-t_\text{х})+\beta(t-t_\text{г})=0$:

$$\begin{aligned} 180\,(36-t_\text{х})+60\,(36-t_\text{г})=0 &\quad\Rightarrow\ 3t_\text{х}+t_\text{г}=144,\\ 120\,(48-t_\text{х})+90\,(48-t_\text{г})=0 &\quad\Rightarrow\ 4t_\text{х}+3t_\text{г}=336. \end{aligned}$$

Из первого $t_\text{г}=144-3t_\text{х}$; подставляем во второе: $4t_\text{х}+432-9t_\text{х}=336$, откуда $t_\text{х}=19{,}2$ °C и $t_\text{г}=144-57{,}6=86{,}4$ °C.

3. Третий опыт. $\alpha_3=160°$, $\beta_3=80°$, сумма 240°:

$$t_3=\frac{160\cdot 19{,}2+80\cdot 86{,}4}{160+80}=\frac{3072+6912}{240}\ ^\circ\text{C}=41{,}6\ ^\circ\text{C}.$$

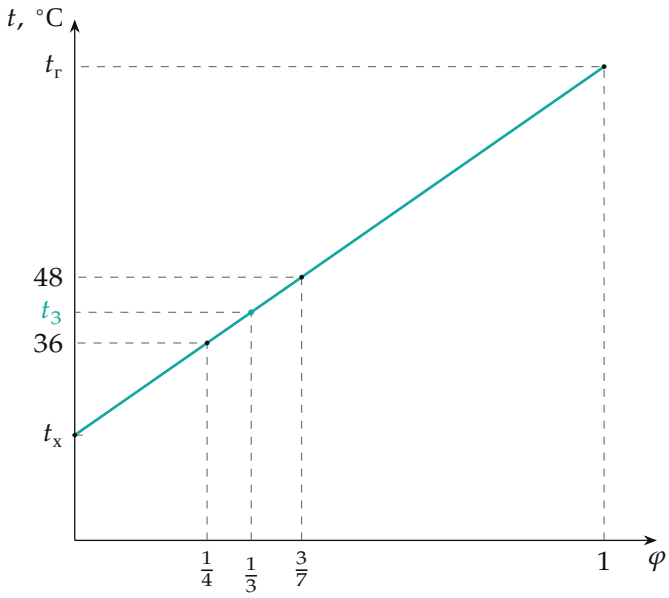
Второй способ. Запишем формулу из пункта 1 иначе:

$$t=t_\text{х}+(t_\text{г}-t_\text{х})\,\frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Температура смеси линейно зависит от доли горячей воды $\varphi=\beta/(\alpha+\beta)$, а значит, три опыта лежат на одной прямой. Доли: $\varphi_1=60/240=1/4$, $\varphi_2=90/210=3/7$, $\varphi_3=80/240=1/3$. Прямая через первые два опыта даёт

$$t_3=t_1+(t_2-t_1)\,\frac{\varphi_3-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_1}=36+12\cdot\frac{1/12}{5/28}=36+5{,}6=41{,}6\ ^\circ\text{C}.$$

Температуры $t_\text{х}$ и $t_\text{г}$ для ответа не понадобились — они лишь концы этой прямой (долям 0 и 1 отвечают 19,2 и 86,4 °C).



Температура смеси — линейная функция доли горячей воды $\varphi = \beta/(\alpha + \beta)$

Обратите внимание. Нельзя считать температуру смеси по «среднему углу» или складывать углы как температуры: в баланс входят массы, то есть расходы $k\alpha$ и $k\beta$, и температура есть среднее с весами. Если бы краны были разными, коэффициенты k в двух кранах не сократились бы.

Проверка. Температура смеси лежит между $t_х$ и $t_г$: $19{,}2 < 41{,}6 < 86{,}4$; в опыте 3 горячего меньше половины ($\varphi_3 = \frac{1}{3}$), и $t_3 = t_х + \frac{1}{3}(t_г - t_х) = 19{,}2 + 22{,}4 = 41{,}6\,^\circ\text{C}$. Проверим и первые два: $t_1 = 19{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 67{,}2 = 36$, $t_2 = 19{,}2 + \frac{3}{7}\cdot 67{,}2 = 48\,^\circ\text{C}$. Размерность: температура — среднее температур.

Ответ. $t_3 = 41{,}6\,^\circ\text{C}$.