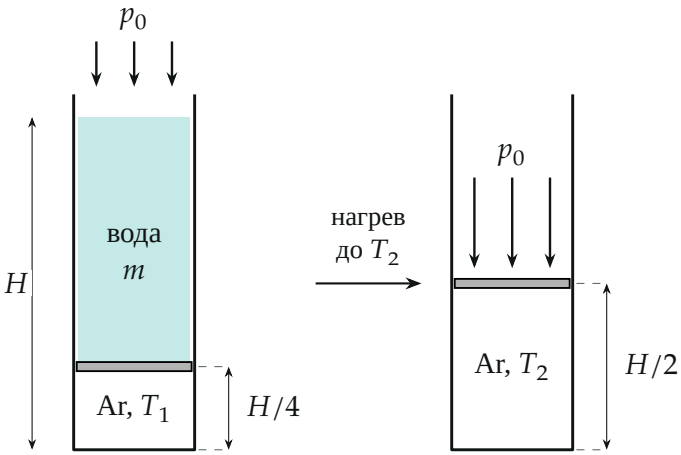
Аргон под поршнем с водой

Задача 4. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 4] В нижней части вертикального цилиндрического сосуда, разделённого подвижным лёгким поршнем, находится аргон. Верхняя часть сосуда полностью заполнена водой массой $m = 1$ кг и открыта в атмосферу. При температуре $t_1 = 27$ °C поршень расположен на высоте, составляющей $1/4$ высоты сосуда. После нагревания всей системы до температуры $t_2 = 127$ °C равновесие достигается при расположении поршня на $1/2$ высоты сосуда. Найдите площадь S поперечного сечения сосуда и высоту H сосуда. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Абсолютный нуль считайте равным $t_0 = -273$ °C, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Слева — сосуд при $T_1 = 300$ K, справа — при $T_2 = 400$ K: воды над поршнем уже нет

▲ **Решение. Что происходит.** Лёгкий поршень не прибавляет давления, поэтому давление аргона равно давлению над поршнем. Сначала над поршнем вода и атмосфера: аргон сжат весом воды. При $t_2 = 127$ °C вода в открытом сосуде существовать не может: давление насыщенного пара при 127 °C около $2{,}5 \cdot 10^5$ Па, а давление в самом нижнем слое

воды не больше $p_0 + mg/S$, то есть полтора атмосферных; вода закипает и целиком уходит из сосуда паром. Тогда в конце на поршень давит только атмосфера. Количество аргона не менялось, и для него записываем уравнение состояния в начале и в конце: pV/T одно и то же. Две неизвестные S и H найдём из этого уравнения и из массы воды.

Обозначения. $T_1 = t_1 - t_0 = 300$ K, $T_2 = t_2 - t_0 = 400$ K; p_1, V_1 — давление и объём аргона в начале, p_2, V_2 — в конце.

1. Давление аргона в начале. Поршень лёгкий, значит давление газа равно давлению над поршнем. Вода заполняет цилиндрическую часть, поэтому её вес целиком приходится на поршень: давление воды на поршень равно mg/S, независимо от высоты столба. Вместе с атмосферой

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}, \qquad V_1 = S\,\frac{H}{4}.$$

2. Давление аргона в конце. Воды над поршнем нет, остаётся одно атмосферное давление:

$$p_2 = p_0, \qquad V_2 = S\,\frac{H}{2}.$$

3. Уравнение состояния. Число молей аргона не изменилось, поэтому по уравнению Клапейрона для газа в состояниях 1 и 2

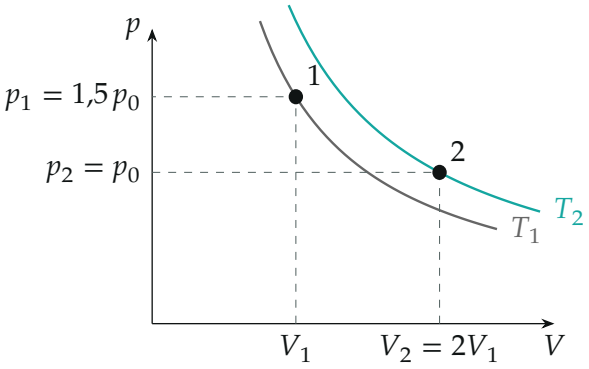
$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\frac{SH}{4T_1} = p_0\,\frac{SH}{2T_2}.$$

Сокращаем SH — неизвестная H уходит, и остаётся уравнение для S:

$$p_0 + \frac{mg}{S} = 2p_0\frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{S} = p_0\left(2\frac{T_1}{T_2} - 1\right),$$

$$S = \frac{mg}{p_0\left(2\dfrac{T_1}{T_2} - 1\right)}.$$

Числа: $2T_1/T_2 - 1 = 0{,}5$, $S = \dfrac{1\cdot 10}{10^5\cdot 0{,}5}$ м^2 $= 2\cdot 10^{-4}$ м^2 $= 2$ см^2.



Состояния аргона на pV-диаграмме: давление упало с $1{,}5\,p_0$ до p_0, но объём вырос вдвое — pV выросло в $4/3$ раза, ровно как T_2/T_1

4. Высота сосуда. Вода массой m в начале заполняла цилиндр над поршнем: высота столба $H - H/4 = 3H/4$, объём $S \cdot 3H/4$. Масса воды через плотность:

$$m = \rho S\,\frac{3H}{4} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{4m}{3\rho S} = \frac{4p_0}{3\rho g}\left(2\frac{T_1}{T_2} - 1\right),$$

где m/S взято из пункта 3. Числа: $H = \dfrac{4 \cdot 1}{3 \cdot 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}$ м $= 6{,}7$ м.

Обратите внимание. Нельзя считать, что вода осталась над поршнем и лишь частично вылилась через край. Тогда в конце $p_2 = p_0 + \rho g\,H/2$, и уравнение состояния при $T_1/T_2 = 3/4$ давало бы $\dfrac{p_0 + \frac{3}{4}\rho g H}{3} = \dfrac{p_0 + \frac{1}{2}\rho g H}{2}$, то есть $p_0 = 0$ — противоречие. Значит, к концу воды над поршнем нет, и именно это соответствует физике: при 127 °C вода кипит.

Проверка. Подставим найденные числа в исходные состояния: $p_1 = p_0 + \rho g \cdot \frac{3}{4}H = 10^5 + 1000 \cdot 10 \cdot 5 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па, $V_1 = S \cdot 1{,}67$ м $= 3{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^3, $p_1 V_1/T_1 = 0{,}167$; $p_2 V_2/T_2 = 10^5 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-4}/400 = 0{,}167$ — совпало. Размерность: $mg/(p_0)$ — площадь, $p_0/(\rho g)$ — длина.

Ответ. $S = \dfrac{mg}{p_0\,(2T_1/T_2 - 1)} = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2 $= 2$ см^2; $H = \dfrac{4p_0}{3\rho g}\,(2T_1/T_2 - 1) \approx 6{,}7$ м.