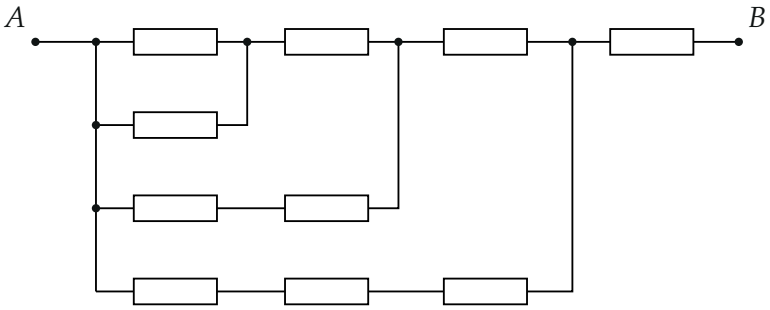
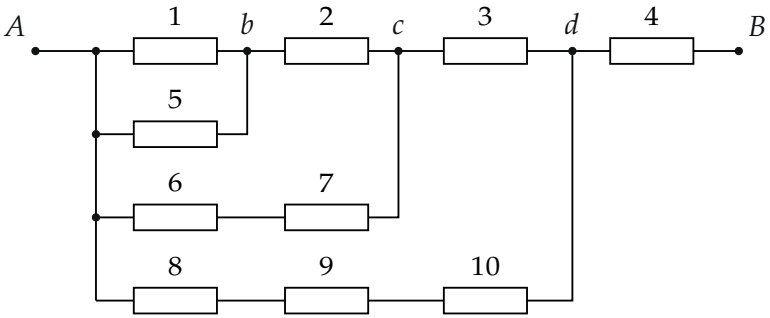
Перерезанный провод в цепи

Задача 5. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 5] Участок AB электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно $R_1 = 219$ Ом. После того, как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка AB стало равным $R_2 = 255$ Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.



▲ **Решение. Что происходит.** Все резисторы одинаковы с неизвестным сопротивлением R. Сначала найдём R из первого значения $R_1 = 219$ Ом: схему упрощаем, последовательно заменяя параллельные и последовательные участки одним резистором. Потом выразим второе значение через R и поймём, что должна сделать перерезанная перемычка. Разрыв провода может сделать с цепью две вещи: убрать из неё одну ветвь параллельного участка (сопротивление растёт) или оставить часть цепи без тока вовсе. Искомое место найдём из условия, что сопротивление стало ровно R_2.

Обозначения. Резисторы пронумерованы на рисунке ниже, R — сопротивление одного из них. b, c, d — узлы на верхней линии: b — правые концы резисторов 1 и 5, c — правый конец ветви 6, 7, d — правый конец ветви 8, 9, 10.



Нумерация резисторов и узлы b, c, d

1. Сопротивление участка AB до разрыва. Упрощаем от левого края.

а) Резисторы 1 и 5 включены между одними и теми же точками — шиной слева и узлом b: параллельно, $R/2$. Последовательно с ними стоит резистор 2: от шины A до узла c верхняя ветвь даёт $\frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$.

б) Ветвь из последовательных резисторов 6 и 7 даёт $2R$ и подходит к тому же узлу c. Параллельно:

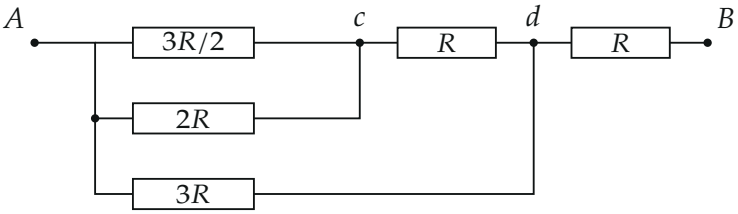
$$\frac{\frac{3}{2}R \cdot 2R}{\frac{3}{2}R + 2R} = \frac{6}{7}R.$$

в) Последовательно резистор 3: от A до узла d получаем $\frac{6}{7}R + R = \frac{13}{7}R$. Параллельно ему идёт нижняя ветвь из трёх последовательных резисторов 8, 9, 10, то есть $3R$:

$$\frac{\frac{13}{7}R \cdot 3R}{\frac{13}{7}R + 3R} = \frac{39}{34}R.$$

г) Остаётся последовательный резистор 4:

$$R_1 = \frac{39}{34}R + R = \frac{73}{34}R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{34}{73} \cdot 219\ \text{Ом} = 102\ \text{Ом}.$$



Эквивалентная схема после замены 1–2 *на* $3R/2$, 6–7 *на* $2R$, 8–10 *на* $3R$

2. Что нужно получить. Новое сопротивление в долях R:

$$\frac{R_2}{R} = \frac{255}{102} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

До разрыва было $\frac{73}{34} \approx 2{,}15$, нужно 2,5: сопротивление должно вырасти на $\frac{12}{34}R$.

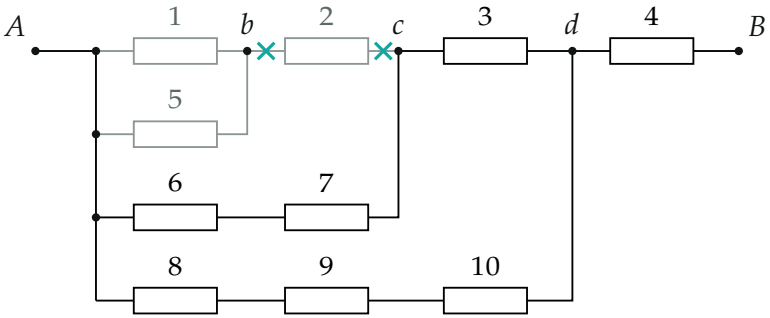
3. Разрыв слева от резистора 2. Перережем провод между узлом b и левым выводом резистора 2. Тогда узел b соединён только с резисторами 1 и 5, а левый вывод резистора 2 повис: резисторы 1, 5 и 2 образуют тупик, тока через них нет и из цепи они выпадают. Остаются 6, 7 в ветви $2R$ от A к c, резистор 3 от c к d, ветвь $3R$ от A к d и резистор 4.

4. Сопротивление после разрыва. Путь $A \to c \to d$ даёт $2R+R = 3R$, параллельно ему ветвь $3R$:

$$\frac{3R \cdot 3R}{3R + 3R} = \frac{3}{2}R, \qquad R_2 = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R = 2{,}5 \cdot 102 \text{ Ом} = 255 \text{ Ом}.$$

Совпало с условием.

5. Разрыв справа от резистора 2. Провод между правым выводом резистора 2 и узлом c. Теперь повис правый вывод резистора 2, а левый соединён через узел b с резисторами 1, 5, которые тоже ведут в тупик: те же три резистора выпадают из цепи, и сопротивление то же, 255 Ом.



Места разрыва (крестики; каждый — отдельный вариант). Серые резисторы 1, 2, 5 *после разрыва в цепи не участвуют*

Обратите внимание. Резисторы 1 и 5 выпадают вместе с резистором 2: при разрыве возле 2 узел b остаётся без выхода. Если же перерезать провод, идущий к одному из резисторов 1, 5, сопротивление изменится иначе — у 1 и 5 слева оно станет $2{,}2R$, а не $2{,}5R$.

Проверка. Размерность: сопротивление в омах. Перебор всех двадцати одного провода между соседними узлами и выводами (расчёт в python, дробями) показывает: значение $2{,}5R = 255$ Ом даёт только перерезание провода непосредственно слева или справа от резистора 2; остальные разрывы дают $2{,}2R$, $2{,}36R$, $2{,}86R$, $3{,}3R$ или $4R$, либо полностью обрывают цепь (разрыв провода у A или B).

Ответ. Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).